

中級卷(9-10 年級)

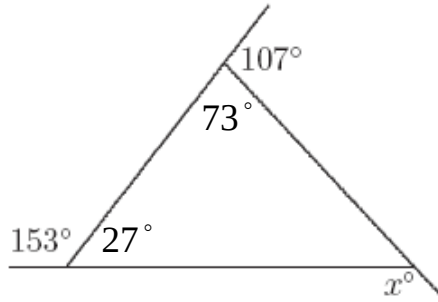
1. $802 - 208 = 594$

答案：(E)

2. 因已知 $1.08 \times 1.8 = 1.944$ ，故答案應為調整 1.944 的小數點位置。因所求乘式裡的數皆為整數且沒有 10 的倍數，故答案為 1944

答案：(B)

3. 如圖，可知三角形的兩個內角為 27° 與 73° 。因外角 x° 為兩個遠內角之和，故 $x = 27 + 73 = 100$



答案：(A)

4. (同初級卷第 6 題、高級卷第 4 題) $\frac{200 \times 8}{200 \div 8} = \frac{200 \times 8 \times 8}{200} = 8 \times 8 = 64$

答案：(D)

5. (同初級卷第 9 題) 可組成之最大偶數為 98756，故十位數為 5

答案：(A)

6. 【方法一】

令這四個數為 x 、 $x+2$ 、 $x+4$ 、 $x+6$ 。則可得 $x+x+2+x+4+x+6=4x+12=48$ ，即 $x=9$ 。因此最大數為 $9+6=15$

【方法二】

因四數平均為 12，故中間兩項奇數為 11 與 13 而另兩個奇數分別為 9 與 15，故最大數為 15。

答案：(B)

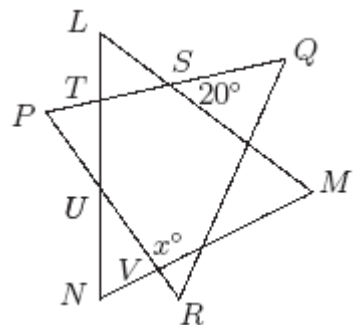
7. (同初級卷第 11 題) 令寬為 x cm，故長為 $2x$ cm。則有 $x \times 2x = 72$ ，即 $x=6$ 。因此周長為 $6+6+12+12=36$ cm

答案：(B)

8. 百分比為 $\frac{x}{y} \times \frac{100}{1} = \frac{100x}{y}$

答案：(E)

9. (同初級卷第 13 題) $\angle LST = \angle MSQ = 20^\circ$ ，故 $\angle LTS = \angle PTU = 100^\circ$ 。因此 $\angle PUT = \angle NUV = 20^\circ$ 。因 x° 為 $\triangle VUN$ 的一個外角，故 $x^\circ = 60^\circ + 20^\circ = 80^\circ$

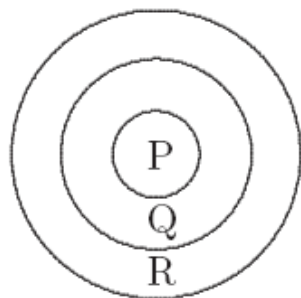


答案：(B)

10. (同高級卷第 7 題) 將 1000^{2008} 的數值寫下，首位數為 1 且有 3×2008 個 0，故共有 $1 + 3 \times 2008 = 6025$ 位

答案：(C)

11.



在第一輪中，小恩有二鏢射中 Q 環與一鏢射中 R 環，共得 10 分；在第二輪中，小恩有二鏢射中 P 圓與一鏢射中 R 環，共得 22 分。將這二輪合併來看，小恩一共有二鏢射中 P 圓、二鏢射中 Q 環與二鏢射中 R 環，即每個區域都射中二鏢，且共得 $10 + 22 = 32$ 分，因此每個區域都射中一鏢的分數為 $32 \div 2 = 16$ 分。

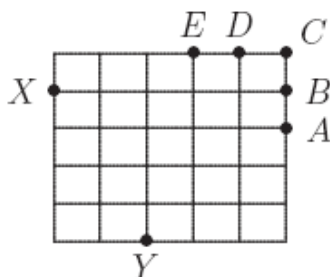
答案：(D)

12. (同初級卷第 16 題) 奇的一位數共有 1、3、5、7 及 9。因此兩個奇的一位數相乘所得之積可為：

$1 \times 1 = 1$ 、 $1 \times 3 = 3$ 、 $1 \times 5 = 5$ 、 $1 \times 7 = 7$ 、 $1 \times 9 = 3 \times 3 = 9$ 、 $3 \times 5 = 15$ 、 $3 \times 7 = 21$ 、 $3 \times 9 = 27$ 、 $5 \times 5 = 25$ 、 $5 \times 7 = 35$ 、 $5 \times 9 = 45$ 、 $7 \times 7 = 49$ 、 $7 \times 9 = 63$ 、 $9 \times 9 = 81$
共有 14 個數。

答案：(C)

13. 由畢氏定理可知 $XY = \sqrt{20}$ 、 $XC = \sqrt{26}$ 、 $XD = \sqrt{17}$ 、 $XB = 5$ 、 $YA = \sqrt{18}$ 以及 $YB = 5$ 。故 B 點與 X 點、Y 點可構成等腰三角形 $\triangle XBY$ 。



答案：(B)

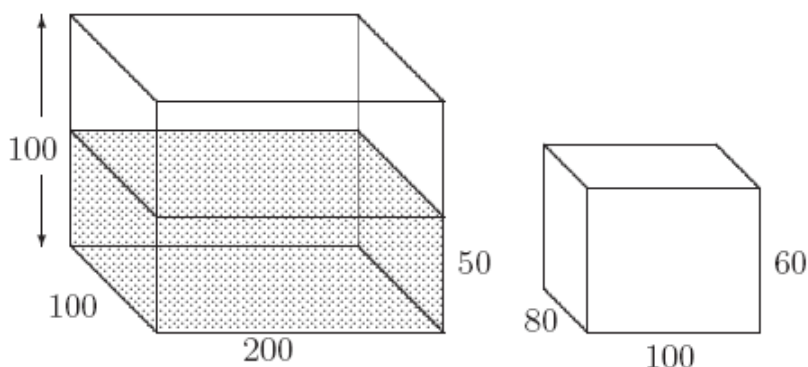
14. 觀察下表，V 表示一枚擲出的數比另一枚擲出的數大而 X 表示兩枚骰子點數相等：

	1	1	2	3	5	8
1	X	X	V	V	V	V
1	X	X	V	V	V	V
2	V	V	X	V	V	V
3	V	V	V	X	V	V
5	V	V	V	V	X	V
8	V	V	V	V	V	X

故在 36 個結果中有 28 個情況是一枚擲出的數比另一枚擲出的數大，因此其
 機率為 $\frac{28}{36} = \frac{7}{9}$

答案：(E)

15. (同初級卷第 24 題、高級卷第 10 題) 水的體積為 $100 \times 200 \times 50 = 1000000 \text{ cm}^3$ ，
 而實心長方體金屬的體積為 $80 \times 100 \times 60 = 480000 \text{ cm}^3$ 。



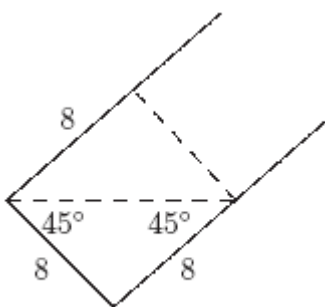
因此若將這個實心長方體金屬全部沉入魚缸內，使得它的 $80 \text{ cm} \times 100 \text{ cm}$ 這
 一個表面貼緊魚缸的底部時，水深為 $\frac{1480000}{20000} = 74 \text{ cm}$ 。因這個實心長方體金
 屬高為 60 cm ，故這個金屬長方體正上方的水深為 14 cm

答案：(B)

16. (同高級卷第 13 題) 將 2008 做質因數分解可得 $2008 = 2^3 \times 251$ ，因此乘以
 2008 後會成為一個完全平方數的最小正整數是 $2 \times 251 = 502$

答案：(D)

17. 如圖，當水杯傾斜成與鉛直線夾 45° 角且水面恰好蓋住水杯的底部時，水杯
 的一側側面將有 8 cm 長的水量，此即表示此時的水量為將水杯立起來時水
 深為 8 cm 之水量的一半，故此時水杯內有 $\frac{1}{2} \pi \times 4^2 \times 8 = 64\pi \text{ cm}^3$



答案：(B)

18. (同初級卷第 22 題) 設該數為 x 。則由條件知 $x+1$ 可被 2、3 及 5 整除，換
 言之， $x+1$ 為 30 的倍數。而 30 的倍數中，小於 2008 的最大數為 1980，故
 該數為 1979，因此其數碼和為 26。

答案：(A)

19. 令圓 O 的半徑為 r ，則

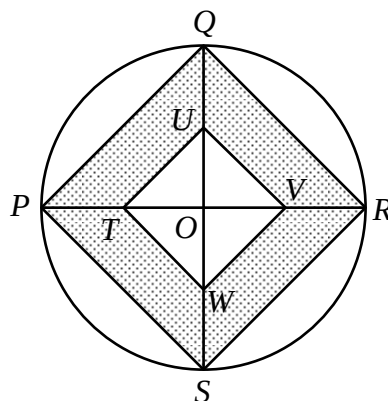
四邊形 $PQRS$ 的面積為 $\frac{1}{2} \times 4r^2 = 2r^2$ 、

四邊形 $UVWT$ 的面積為 $\frac{1}{2} \times 4 \left(\frac{1}{2}r \right)^2 = \frac{1}{2}r^2$ ，

因此陰影部分的面積為 $2r^2 - \frac{1}{2}r^2 = \frac{3}{2}r^2$ 。

而圓 O 的面積為 πr^2 ，

故陰影部分的面積是圓面積的 $\frac{\frac{3}{2}r^2}{\pi r^2} = \frac{3}{2\pi}$



答案：(C)

20. 小於 50 的質數為：2、3、5、7、11、13、17、19、23、29、31、37、41、43 及 47。

因為任二個奇質數之和必為偶數也因此不可能為質數，故 p 、 q 、 r 其中之一必為偶數，即為 2。

因為 $p+q=r$ ，所以 2 是 p 、 q 其中之一，故 r 與 $r-2$ 都必須是小於 50 的質數，因此 r 可能為 5、7、13、19、31 或 43，共有 6 種可能性。

答案：(D)

21. (同初級卷第 23 題、高級卷第 18 題) 因為集雨的水量與集雨的面積成正比，所以「農舍屋頂的集雨量」：「穀倉屋頂的集雨量」= 200 : 80 = 5 : 2。因此若要收集儘可能多的雨水，兩個蓄水池的剩餘集水空間也要是 5 : 2。

此時因農舍蓄水池仍有 $100 - 35 = 65$ KL 的剩餘集水空間、穀倉蓄水池仍有 $25 - 13 = 12$ KL 的剩餘集水空間，而 $\frac{65}{12} > \frac{5}{2}$ ，故要從穀倉蓄水池抽取水至農舍蓄水池。

假設從穀倉蓄水池抽取 x KL 的水至農舍蓄水池，則農舍蓄水池有 $(65-x)$ KL 的剩餘集水空間、穀倉蓄水池有 $(12+x)$ KL 的剩餘集水空間，則可得

$$\begin{aligned} \frac{65-x}{12+x} &= \frac{5}{2} \\ 130 - 2x &= 60 + 5x \\ x &= 10 \end{aligned}$$

因此要從穀倉蓄水池抽取 10 KL 的水至農舍蓄水池。

答案：(D)

22. 從 0 至 9 的平方依序為 0、1、4、9、16、25、36、49、64、81。

而 $(10b+a)^2 = 100b^2 + 20ab + a^2$ ，因此當一個數平方後的十位數是 7 時，一定是該數的個位數平方後有進位且進位的數為奇數，即該數的個位數為 4 或 6，故該數平方後的個位數必為 6。因 $24^2 = 576$ ，所以題目所要求的數存在。

答案：(B)

23. 先考慮和不超過 2008 的情況，則這些數中最小的數之最大可能值必發生在這 25 個數為連續的正整數時。令這 25 個連續正整數中最小的數為 m ，故有

$$m+(m+1)+(m+2)+\cdots+(m+24)\leq 2008$$

$$25m+300\leq 2008, m\leq 68.32$$

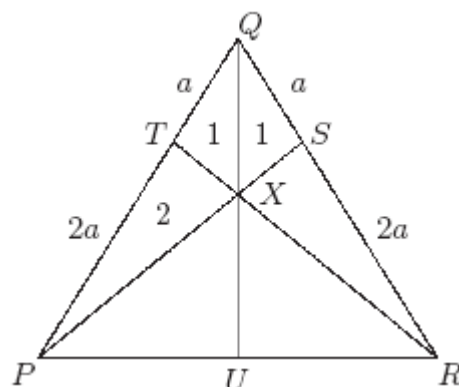
故 m 的最大可能值為 68。若取 $m=68$ ，此時這 25 個連續正整數之總和為

$$68+69+70+\cdots+91+92=2000$$

因此要求總和為 2008 時，可得 $68+69+70+\cdots+91+100=2008$

答案：(D)

24. 已知 $\triangle QSX$ 之面積為 1 平方單位，故 $\triangle QTX$ 之面積也是 1 平方單位且因此 $\triangle TPX$ 之面積為 2 平方單位（因兩三角形的高一樣而底之比為 1:2），所以 $\triangle QPS$ 之面積為 4 平方單位。因為 $\triangle SPR$ 之面積為 $\triangle QPS$ 之面積的 2 倍（因兩三角形的高一樣而底之比為 1:2），所以 $\triangle SPR$ 之面積為 8 平方單位，故 $\triangle PQR$ 之面積為 $4+8=12$ 平方單位



答案：(D)

25. 因 3 必整除 $6n$ ，故由 n 的各位數碼之和等於 $6n$ 的各位數碼之和可知 n 必為 3 的倍數。令 $n=3k$ ，則 $6n=18k$ ，因此 $6n$ 為 9 的倍數，再由 n 的各位數碼之和等於 $6n$ 的各位數碼之和可知 n 必為 9 的倍數。右表為逐一檢驗兩位數中為 9 的倍數是否滿足題意。因此共有 8 個數。

n	$6n$	數碼和是否相等
18	108	是
27	162	是
36	216	是
45	270	是
54	324	是
63	378	否
72	432	是
81	486	否
90	540	是
99	594	是

答案：(D)

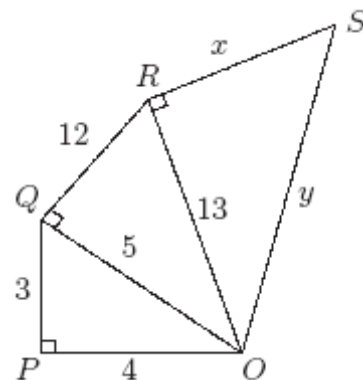
26. 利用畢氏定理可以得知 $OQ=5\text{cm}$ 及 $OR=13\text{cm}$ 。令

$RS=x\text{cm}$ 、 $SO=y\text{cm}$ ，則再利用畢氏定理可得知 $y^2=x^2+13^2$ ，即 $(y-x)(y+x)=169$ 。

因 $4+3+12+x+y=188$ ，故 $x+y=169$ ，所以可知 $y-x=1$ 。因此可以算出 $y=85$ 、 $x=84$ 。

因五邊形 $OPQRS$ 的面積即為 $\triangle OPQ$ 之面積、 $\triangle OQR$ 之面積與 $\triangle ORS$ 之面積總和，所以五邊形 $OPQRS$

的面積 $=\frac{1}{2}\times 4\times 3+\frac{1}{2}\times 5\times 12+\frac{1}{2}\times 13\times 84=582\text{cm}^2$

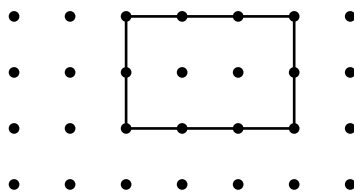


答案：582

27. (同初級卷第 28 題)

【方法一】

先考慮長方體底面上的整數格點。此時共有 $7 \times 4 = 28$ 個格點。



再來考慮由這些格點所構成的相異矩形（含正方形）數量。

首先，要先從長邊的 7 個點中選出 2 個點：

當選定左邊數來第一個點為其中一點時有 6 種選法、當選定左邊數來第二個點為其中一點時有 5 種選法、當選定左邊數來第三個點為其中一點時有 4 種選法、當選定左邊數來第四個點為其中一點時有 3 種選法、當選定左邊數來第五個點為其中一點時有 2 種選法、當選定左邊數來第六個點為其中一點時有 1 種選法，合計共有 $6+5+4+3+2+1=21$ 種選法。

再來要從短邊的 4 個點中選出 2 個點，利用相同想法可知當選定由上數來第一個點為其中一點時有 3 種選法、當選定由上數來第二個點為其中一點時有 2 種選法、當選定由上數來第三個點為其中一點時有 1 種選法，合計共有 $3+2+1=6$ 種選法。

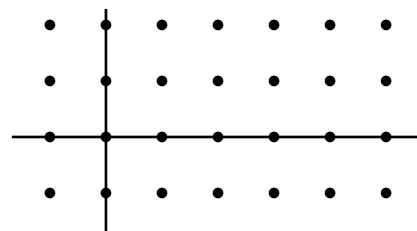
因此由這些格點所構成的相異矩形數為 $21 \times 6 = 126$ 個。

現在，考慮整個長方體從頂面到底面的四層平面，其中每個平面的高度都是整數。選出二層作為所求長方體之頂面與底面，利用相同想法可知當選定頂面為其中一層時有 3 種選法、當選定由頂面數來第二層為其中一層時有 2 種選法、當選定由頂面數來第三個層為其中一層時有 1 種選法，合計共有 $3+2+1=6$ 種選法。

因此所要求的長方體有 $126 \times 6 = 756$ 個

【方法二】

在長方體中共有 $7 \times 4 \times 4$ 個格點。每一個所求之長方體都可由這些格點中的相異兩點所決定（作為所求長方體之一條對角線上的兩點）。因此其中一點有 $7 \times 4 \times 4$ 中選法而另一點則有 $6 \times 3 \times 3$ 種選法（因為兩點不能在同一平面上），即有 $7 \times 4 \times 4 \times 6 \times 3 \times 3$ 種方法



選出相異兩點。但因這樣會將每一個形成的長方體重複算 8 次（因長方體對角線有 4 條，且起點與終點可交換）因此共有 $\frac{7 \times 4 \times 4 \times 6 \times 3 \times 3}{8} = 756$ 個所要求的長方體。

答案：756

28. 本題可看成求出最大的 i 值使得 10^i 整除 $2008!$ ，而這又等價於在找出最大的 k 值使得 2^k 整除 $2008!$ 以及最大的 h 值使得 5^h 整除 $2008!$ 後取出這兩數中的較小值，故所求之數就是最大的 h 值使得 5^h 整除 $2008!$ 。

在每一個 5 的倍數中都可以提出一個因數 5，每一個 $5^2=25$ 的倍數中可再多提出一個因數 5，每一個 $5^3=125$ 的倍數中可再多提出一個因數 5，每一個 $5^4=625$ 的倍數中可再多提出一個因數 5；而因 $5^5=3125>2008$ ，所以只須考慮到 $5^4=625$ 即可。

故 2008! 之末尾連續的 0 的個數

$$\begin{aligned}&= (5 \text{ 的倍數中小於 } 2008 \text{ 的數目}) + (25 \text{ 的倍數中小於 } 2008 \text{ 的數目}) \\&\quad + (125 \text{ 的倍數中小於 } 2008 \text{ 的數目}) + (625 \text{ 的倍數中小於 } 2008 \text{ 的數目}) \\&= 401 + 80 + 16 + 3 \\&= 500\end{aligned}$$

答案：500

29. (同初級卷第 29 題、高級卷第 27 題) 從給定項數時，所能找到之和的最大數來看起。

1 項時： $1=1$ ；

2 項時： $2=1+1$ ；

3 項時： $4=1+2+1$ ；

4 項時： $6=1+2+2+1$ ；

5 項時： $9=1+2+3+2+1$ ；

6 項時： $12=1+2+3+3+2+1$ 。

可以發現項數分別為奇數與偶數時有不同的公式：

若為 $2n$ 項時，最大和為 $n(n+1)$ ；若為 $2n+1$ 項時，最大和為 $(n+1)^2$ 。

因 $44 \times 45 = 1980$ 及 $45 \times 45 = 2025$ ，故 88 項不可能達到 2008 而 89 項之和可能為 2008。

因 88 項和的最大值為 $1980 = 1+2+3+\cdots+88+88+87+\cdots+3+2+1$ ，比 2008 少 28，故可在該式中的兩個 28 中任選一個，在其後再加入一個 28 即為項數為 89 項且和為 2008。因此若不使用一些沒有必要的項時此數列需 89 項。

答案：89

30. 【方法一】

從 15 邊形中選出一個點並將通過該點的對角線全部繪出，則可將這個 15 邊形切割為數個三角形。此時因圓的圓心落在 15 邊形的內部，故圓心至少會落在一個三角形內或其邊界上；因圓心為這些三角形的外心，故至少有一個三角形不是鈍角三角形，且這個三角形上這個被選出的 15 邊形頂點其對邊為 15 邊形的一條邊。所以對於 15 邊形的每一個頂點而言，都可以找到一個這樣的三角形使圓心落在這個三角形內或其邊界上。

如果將這 15 個頂點分別塗上 15 種不同的顏色，接著將如上述與頂點對應的三角形塗上相同顏色，則很容易可以發現不會有三角形必須會塗有三種顏色(否則該三角形的三個邊都會是 15 邊形的邊)，且只會有少於 3 個的三角形塗有二種顏色(因為任三個以 15 邊形上的兩個邊為邊的三角形裡，會有兩個這樣的三角形沒有共同點)。所以至少有 $15-2=13$ 個三角形不是鈍角三角形，

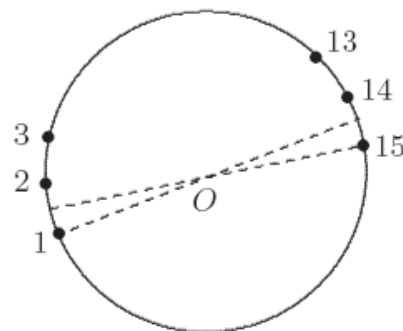
即鈍角三角形最多為 $\frac{15 \times 14 \times 13}{6} - 13 = 442$ 個。若要製造這樣的 15 邊形，只

須將圓周畫出 25 的等分點並從 1 開始編號到 25，則由 1 號點至 15 號點所構成的 15 邊形即為所求。

【方法二】

一個三角形若是鈍角三角形，則其三個頂點都落在該三角形的外接圓裡一個半圓上，且不會有二個點落在該半圓的端點。因此要算出最多有多少個鈍角三角形，就要讓 15 邊形的頂點落在一個半圓內是儘可能的多。

如圖，因要求圓心落在 15 邊形內，故將 15 邊形的頂點依序編號後，將 1 號與 15 號置於通過另一點的直徑的下方，而其他點置於這兩條直徑的上方。



則從 1 號至 14 號的頂點裡任取 3 點所形成的三角形都是鈍角三角形，共有

$$\binom{14}{3} = \frac{14 \times 13 \times 12}{1 \times 2 \times 3} = 364 \text{ 個三角形。}$$

而從 2 號至 14 號的頂點裡任取 2 點與 15 號所形成的三角形也都是鈍角三角

形，共有 $\binom{13}{2} = \frac{13 \times 12}{2} = 78$ 個三角形。

因此至多有 $364 + 78 = 442$ 個鈍角三角形。

答案：442