

高級卷(11-12 年級)

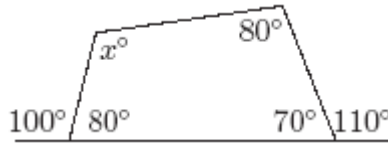
1. $8002 - 2008 = 5994$

答案：(E)

2. $\frac{1}{20}$ 與 $\frac{2}{10}$ 之差為 $\frac{2}{10} - \frac{1}{20} = \frac{4-1}{20} = \frac{3}{20}$

答案：(E)

3. 如圖，利用補角與四邊形的內角和可知 $x = 360 - 80 - 80 - 70 = 130$



答案：(D)

4. (同初級卷第 6 題、中級卷第 4 題) $\frac{200 \times 8}{200 \div 8} = \frac{200 \times 8 \times 8}{200} = 8 \times 8 = 64$

答案：(D)

5. 【方法一】

因為 $x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3)$ ，所以極小值會發生在 $x=2$ 時且其值為 $1 \times (-1) = -1$

【方法二】

$x^2 - 4x + 3 = (x-2)^2 - 1$ ，所以極小值會發生在 $x=2$ 時且其值為 -1

答案：(A)

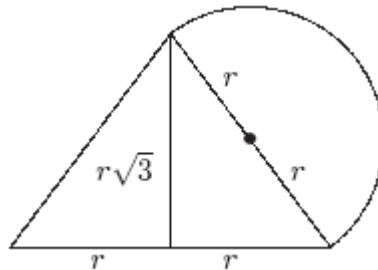
6. 3 元應分為 1.75 元與 1.25 元，其比為 $175 : 125 = 7 : 5$

答案：(B)

7. (同中級卷第 10 題) 將 1000^{2008} 的數值寫下，首位數為 1 且有 3×2008 個 0，故共有 $1 + 3 \times 2008 = 6025$ 位

答案：(C)

8. 如圖，令圓的半徑為 r ，則正三角形的邊長為 $2r$ 且由畢氏定理可知高為 $r\sqrt{3}$ 。



因此半圓的面積為 $\frac{\pi r^2}{2}$ 而正三角形的面積為 $\frac{2r \times r\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}r^2$ ，

所以面積比為 $\frac{\pi r^2}{2} : \sqrt{3}r^2 = \pi : 2\sqrt{3}$

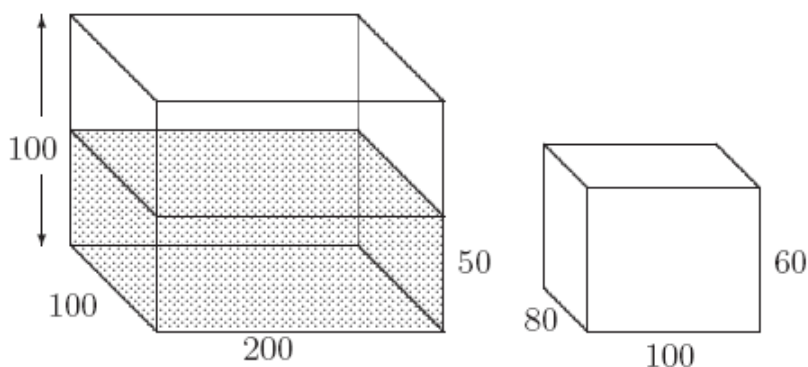
答案：(B)

9. 因 $\cos x = 0.5 = \frac{1}{2}$ ，故 $\cos^2 x = \frac{1}{4}$ 且因此 $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 。而 $\tan x = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$ ，所以

$\tan x = \sqrt{3}$ 是選項中最大的

答案：(E)

10. (同初級卷第 24 題、中級卷第 15 題) 水的體積為 $100 \times 200 \times 50 = 1000000 \text{ cm}^3$ ，而實心長方體金屬的體積為 $80 \times 100 \times 60 = 480000 \text{ cm}^3$ 。



因此若將這個實心長方體金屬全部沉入魚缸內，使得它的 $80 \text{ cm} \times 100 \text{ cm}$ 這一個表面貼緊魚缸的底部時，水深為 $\frac{1480000}{20000} = 74 \text{ cm}$ 。因這個實心長方體金屬高為 60 cm ，故這個金屬長方體正上方的水深為 14 cm

答案：(B)

11. 因 $2^{500} = 32^{100}$ 、 $3^{400} = 81^{100}$ 、 $4^{300} = 64^{100}$ 、 $5^{200} = 25^{100}$ 、 $6^{100} = 6^{100}$ ，故最大值為 $3^{400} = 81^{100}$

答案：(B)

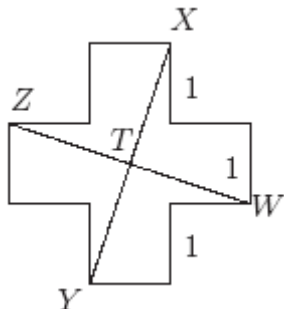
12. 因為投擲 1 次的期望值為 $1 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{1}{6} + 3 \times \frac{1}{6} + 4 \times \frac{1}{6} + 5 \times \frac{1}{6} + 6 \times \frac{1}{6} = \frac{21}{6} = \frac{7}{2}$ ，故投擲 100 次的點數總和接近 $100 \times \frac{7}{2} = 350$

答案：(D)

13. (同中級卷第 16 題) 將 2008 做質因數分解可得 $2008 = 2^3 \times 251$ ，因此乘以 2008 後會成為一個完全平方數的最小正整數是 $2 \times 251 = 502$

答案：(D)

14. 如圖所示，做輔助線 ZW ，且 ZW 與 XY 的交點為 T 。則由對稱性知 XT 、 WT 、 YT 與 ZT 的長度都等長。因矩形的長與寬即為 XY 與 XT ，故其比為 $2:1$



答案：(C)

15. 因 $f(x) = ax^2 + bx + c$ ，故知

$$f(1) = a + b + c = 2 \quad (1)\text{式}$$

$$f(2) = 4a + 2b + c = 3 \quad (2)\text{式}$$

$$f(3) = 9a + 3b + c = 1 \quad (3)\text{式}$$

即可得

$$(2)\text{式} - (1)\text{式} : 3a + b = 1 \quad (4)\text{式}$$

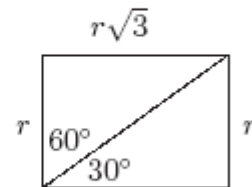
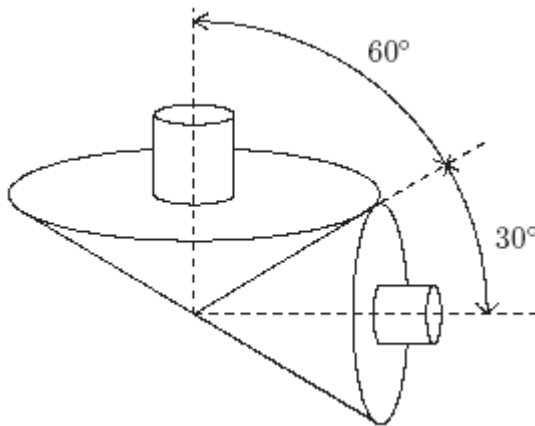
$$(3)\text{式} - (2)\text{式} : 5a + b = -2 \quad (5)\text{式}$$

$$(5)\text{式} - (4)\text{式} : 2a = -3 \quad (6)\text{式}$$

$$\text{故 } a = -\frac{3}{2}、b = \frac{11}{2}、c = -2$$

答案：(A)

16. 如圖，令小陀螺的半徑為 r ，則大陀螺的半徑為 $r\sqrt{3}$



因此大陀螺的圓周為 $2\pi r\sqrt{3}$ 而小陀螺的圓周為 $2\pi r$ 。故當大陀螺轉動 1 圈時，小陀螺轉動 $\frac{2\pi r\sqrt{3}}{2\pi r} = \sqrt{3}$ 圈

答案：(D)

17. 若集合 $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 的子集中有超過 4 個元素，則必含有連續的整數，故只須考慮僅有 1、2 或 3 個元素的子集合。

僅有 1 個元素： $\{1\}$ 、 $\{2\}$ 、 $\{3\}$ 、 $\{4\}$ 、 $\{5\}$ 、 $\{6\}$ 共 6 種；

恰有 2 個元素： $\{1, 3\}$ 、 $\{1, 4\}$ 、 $\{1, 5\}$ 、 $\{1, 6\}$ 、 $\{2, 4\}$ 、 $\{2, 5\}$ 、 $\{2, 6\}$ 、 $\{3, 5\}$ 、 $\{3, 6\}$ 、 $\{4, 6\}$ 共 10 種；

恰有 3 個元素： $\{1, 3, 5\}$ 、 $\{1, 3, 6\}$ 、 $\{1, 4, 6\}$ 、 $\{2, 4, 6\}$ 共 4 種；

因此共有 $6 + 10 + 4 = 20$ 個子集合滿足題意

答案：(C)

18. (同初級卷第 23 題、中級卷第 21 題) 因為集雨的水量與集雨的面積成正比，所以「農舍屋頂的集雨量」：「穀倉屋頂的集雨量」 $= 200 : 80 = 5 : 2$ 。因此若要收集儘可能多的雨水，兩個蓄水池的剩餘集水空間也要是 5 : 2。

此時因農舍蓄水池仍有 $100 - 35 = 65$ KL 的剩餘集水空間、穀倉蓄水池仍有

假設從穀倉蓄水池抽取 x KL 的水至農舍蓄水池，則農舍蓄水池有 $(65-x)$ KL 的剩餘集水空間、穀倉蓄水池有 $(12+x)$ KL 的剩餘集水空間，則可得

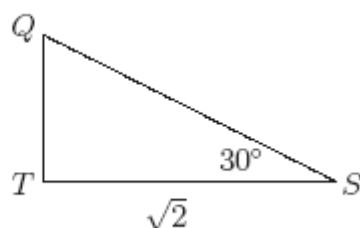
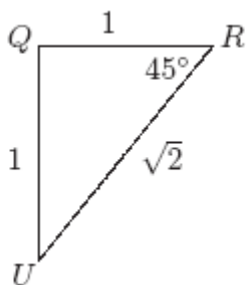
$$\frac{65-x}{12+x} = \frac{5}{2}$$
$$130 - 2x = 60 + 5x$$
$$x = 10$$

答案：(D)

- $u_3 = b - a$ 、 $u_4 = b - a - b = -a$ 、 $u_5 = -a - (b - a) = -b$ 、 $u_6 = -b - (-a) = a - b$ 而 $u_7 = a - b - (-b) = a$ 、 $u_8 = a - (a - b) = b$ ，故這是一個週期為 6 的循環數列。

答案：(A)

-
- Figure 1 shows a geometric diagram with two right triangles, QRT and TUS , sharing a common vertex T . The points Q, T, U are collinear, and the points R, T, S are collinear. The angle $\angle QRT$ is labeled as 45° , and the angle $\angle TUS$ is labeled as 30° . Right angle symbols are shown at vertices Q and U .



由直角三角形 QTS 可知 $\frac{QT}{\sqrt{2}} = \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$ 。

因此 $\triangle QTS$ 的面積為 $\frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ 、 $\triangle QRU$ 的面積為 $\frac{1}{2} \times 1 \times 1 = \frac{1}{2}$ ，故所

求之面積比為 $\frac{1}{2} : \frac{1}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} : 2$

答案：(D)

- 依題意繪出右圖，可知 $\angle VUW = 20^\circ$ 。令 α° 為該正多邊形的外角，則知

$$\angle QVU = 2\alpha^\circ \text{ 且 } \angle VUW = 3\alpha^\circ。$$

故知 $3\alpha = 20$ ，即 $\alpha = \frac{20}{3} = \frac{360}{54}$ ，

【方法二】

已知將這個正多邊形的邊 PQ 和邊 TS 延長交於點 U 且 $\angle QUS = 160^\circ$ 。若將這個正多邊形視為將一條邊旋轉 n 次後所得之圖形，可知旋轉 3 次共轉了 $180^\circ - 160^\circ = 20^\circ$ ，故這條邊需旋轉 $(360^\circ \div 20^\circ) \times 3 = 54$ 次才能回到原位，即這個正多邊形有 54 個邊。

答案：(E)

22. 因 $12^3 = 1728 < 2008 < 13^3 = 2197$ ，故知僅需考慮 2^3 、 3^3 、 4^3 、 5^3 、 6^3 、 7^3 、 8^3 、 9^3 、 10^3 、 11^3 與 12^3 的倍數。

因 $\frac{2008}{8} = 251$ ，故有 251 個數可被 2^3 整除，而這些數中也包含了 4^3 、 6^3 、 8^3 、 10^3 與 12^3 的倍數。

令 $\lfloor x \rfloor$ 為表示 x 的整數部分。則可知：

有 $\left\lfloor \frac{2008}{27} \right\rfloor = 74$ 個數可被 3^3 整除，而這些數中也包含了 6^3 、 9^3 與 12^3 的倍數；

有 $\left\lfloor \frac{2008}{125} \right\rfloor = 16$ 個數可被 5^3 整除，而這些數中也包含了 10^3 的倍數；

有 $\left\lfloor \frac{2008}{343} \right\rfloor = 5$ 個數可被 7^3 整除以及有 $\left\lfloor \frac{2008}{1331} \right\rfloor = 1$ 個數可被 11^3 整除。

而以上的數中 6^3 、 10^3 與 12^3 的倍數都被算了 2 次，因此必須減掉 $\left\lfloor \frac{2008}{216} \right\rfloor = 9$ 個

數(6^3 的倍數已包含 12^3 的倍數)及 $\left\lfloor \frac{2008}{1000} \right\rfloor = 2$ 個數，因此共有 $251 + 74 + 16 + 5 + 1 - 9 - 2 = 336$ 個

答案：(B)

23. 【方法一】

令 $a = \overline{xyx}$ 、 $b = \overline{uvu}$ 及 $a - b$ 都是三位數的迴文數，則知

$$a - b = 100(x - u) + 10(y - v) + (x - u)$$

其中 $x - u > 0$ 、 $y - v \geq 0$ 。故所要求之數對的數量即為數對 (x, u) 的數量與數對 (y, v) 的數量相乘的積，其中 $9 \geq x > u > 0$ 、 $9 \geq y \geq v \geq 0$ 。

因 $9 \geq x \geq 1$ 、 $9 \geq u \geq 1$ 且 $x - u > 0$ ，故數對 (x, u) 的數量為 $\binom{9}{2} = 36$ ；

因 $9 \geq y \geq 0$ 、 $9 \geq v \geq 0$ 且 $y > v$ 時，數對 (y, v) 的數量為 $\binom{10}{2} = 45$ ；

而 $9 \geq y \geq 0$ 、 $9 \geq v \geq 0$ 且 $y = v$ 時，數對 (y, v) 的數量為 10，故總數為 $36 \times (45 + 10) = 1980$

【方法二】

令 $\overline{xyx}$ 、 $\overline{uvu}$ 為三位數的迴文數。若 $\overline{xyx} - \overline{uvu}$ 也是三位數的迴文數，則知

$9 \geq x > u \geq 1$ 且 $9 \geq y \geq v \geq 0$ 。

若 $x=9$ ，則 u 有 8 種可能；若 $x=8$ ，則 u 有 7 種可能；若 $x=7$ ，則 u 有 6 種可能；若 $x=6$ ，則 u 有 5 種可能；若 $x=5$ ，則 u 有 4 種可能；若 $x=4$ ，則 u 有 3 種可能；若 $x=3$ ，則 u 有 2 種可能；若 $x=2$ ，則 u 只有 1 種可能；因此 x 與 u 有 $8+7+6+5+4+3+2+1=36$ 種可能配對的方式。

若 $y=9$ ，則 v 有 10 種可能；若 $y=8$ ，則 v 有 9 種可能；若 $y=7$ ，則 v 有 8 種可能；若 $y=6$ ，則 v 有 7 種可能；若 $y=5$ ，則 v 有 6 種可能；若 $y=4$ ，則 v 有 5 種可能；若 $y=3$ ，則 v 有 4 種可能；若 $y=2$ ，則 v 有 3 種可能；若 $y=1$ ，則 v 有 2 種可能；若 $y=0$ ，則 v 只有 1 種可能；因此 y 與 v 有 $10+9+8+7+6+5+4+3+2+1=55$ 種可能配對的方式。

故 $x、y、u、v$ 一共有 $36 \times 55 = 1980$ 種可能配對的方式。

【方法三】

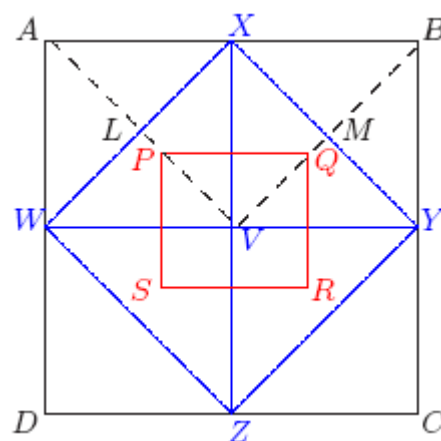
因要求 $a-b$ 也是三位數的迴文數，故令 $a = \overline{xyx}$ ，其中 $2 \leq x \leq 9$ 及 $0 \leq y \leq 9$ 、 $b = \overline{uvu}$ ，其中 $1 \leq u \leq x-1$ 及 $0 \leq v \leq y$ 。因此由 $a = \overline{xyx}$ 可決定出 $(x-1)(y-1)$ 個數對。因對於 $2 \leq x \leq 9$ 時 y 有 55 種可能，故合計共有 $(1+2+3+4+5+6+7+8) \times 55 = 36 \times 55 = 1980$ 種可能的數對。

答案：(B)

24. 右圖為將大正立方體內部的所有點與線都投影在一面上的視圖，其中 $ABCD$ 為大正立方體的該面， $X、Y、Z、W$ 及 V 為正八面體六個頂點裡其中五個頂點的投影， PQ 則是小正立方體裡一邊的投影。

可知 P 是 $\triangle VXW$ 的重心，故知 $PV:LP=2:1$ 。因 $AL=LV$ ，故 $PV:AV=2:(2+1+3)=1:3$ ，即 $PQ:AB=1:3$ 。

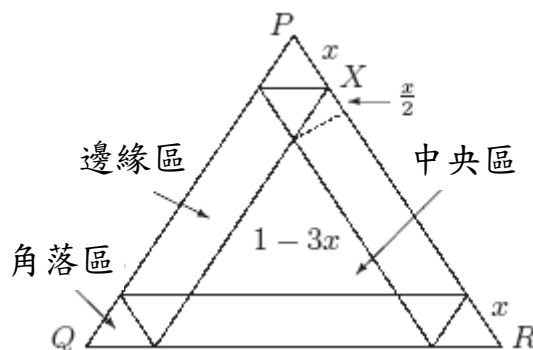
答案：(D)



25. 如圖，正三角形 PQR 被分成三種不同的區域，依其位置命名為中央區、邊緣區及角落區。可知邊緣區的面積大於角落區的面積，因此要讓中央區與角落區中面積較小者盡可能大。

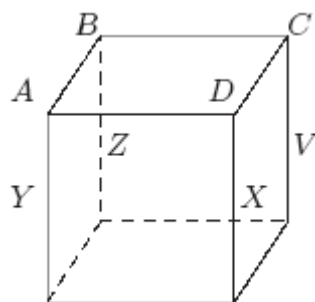
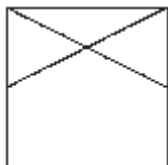
若取 $PX=x$ ，則知邊緣區為邊長 x 的正三角形而中央區為邊長 $1-3x$ 的正三角形。

因要讓中央區與角落區中面積較小者盡可能大，即讓這兩個區域面積相等便可滿足。因此有 $x=1-3x$ ，即 $PX=\frac{1}{4}$ 。



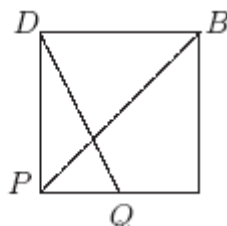
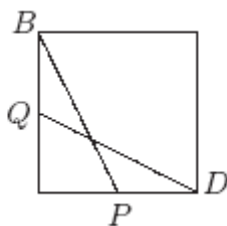
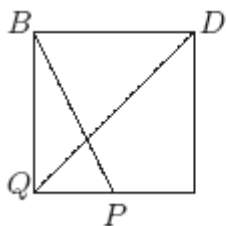
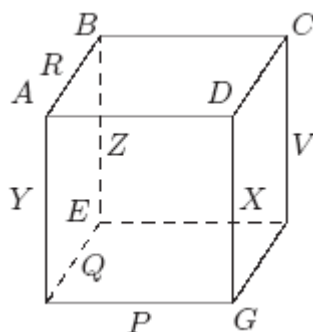
答案：(C)

26. 假設正立方體的邊長為 1。如右圖所示，令正方形 $ABCD$ 為正立方體的頂面， X 、 Y 、 Z 及 V 為所在之邊的中點，則線段 AV 、 BX 、 DZ 及 CY 會在正立方體內部交於 1 點，並從對稱性可知，該點至頂面的中心之距離為 $\frac{1}{4}$ 。



利用相同想法套用在正立方體其他五個面上，共可得 6 個這樣的點。

如右圖，再令 P 、 Q 及 R 也是所在之邊的中點。則線段 BP 與 DQ 也會在正立方體內部交於 1 點。如下圖所示，將線段 BP 與 DQ 分別投影到正立方體的前方、上方及側邊後，可知該交點與其距離最近的正立方體頂點之距離為 $\frac{1}{3}$ （利用每一個情況中邊長比為 2:1 的相似三角形即可得知）。



而這樣的點在正立方體內部一共有 8 個。此時一共找到了 $6+8=14$ 個點。現驗證不會有其它的點，我們從線段 AV 來看。在 B 點與各邊中點連線的線段中，只有三條不會落在正立方體的表面上。 BX 與 AV 的交點即為前述 14 個點之一。對於 BP 與 AV ，若將這兩條線段都投影到正立方體 ADG 這一面上，可發現 BP 與 AV 的投影只會相交在頂點上，即這兩條線段在正立方體內部不會有交點。最後一條線段與 AV 也因為相同原因而沒有交點。利用相同想法套用在 AV 以外的其他線段上，可知除了前述 14 個點之外不會再有其它的交點。

答案：14

27. （同初級卷第 29 題、中級卷第 29 題）從給定項數時，所能找到之和的最大數來看起。

1 項時： $1=1$ ；

2 項時： $2=1+1$ ；

3 項時： $4=1+2+1$ ；

4 項時： $6=1+2+2+1$ ；

5 項時： $9=1+2+3+2+1$ ；

6 項時： $12=1+2+3+3+2+1$ 。

可以發現項數分別為奇數與偶數時有不同的公式：

若為 $2n$ 項時，最大和為 $n(n+1)$ ；若為 $2n+1$ 項時，最大和為 $(n+1)^2$ 。

因 $44 \times 45 = 1980$ 及 $45 \times 45 = 2025$ ，故 88 項不可能達到 2008 而 89 項之和可能為 2008。

因 88 項和的最大值為 $1980 = 1+2+3+\cdots+88+88+87+\cdots+3+2+1$ ，比 2008 少 28，故可在該式中的兩個 28 中任選一個，在其後再加入一個 28 即為項數為 89 項且和為 2008。因此若不使用一些沒有必要的項時此數列需 89 項。

答案：89

$$28. \quad 3x^2 - 8y^2 + 3x^2y^2 = 2008 \Leftrightarrow 3x^2y^2 + 3x^2 - 8y^2 = 2008$$

$$3x^2y^2 + 3x^2 - 8y^2 - 8 = 2008 - 8 \Leftrightarrow 3x^2(y^2 + 1) - 8(y^2 + 1) = 2000$$

$$\Leftrightarrow (3x^2 - 8)(y^2 + 1) = 2000 = 2^4 \times 5^3$$

$$\text{因 } 2000 = 1 \times 2000 = 2 \times 1000 = 4 \times 500 = 5 \times 400 = 8 \times 250$$

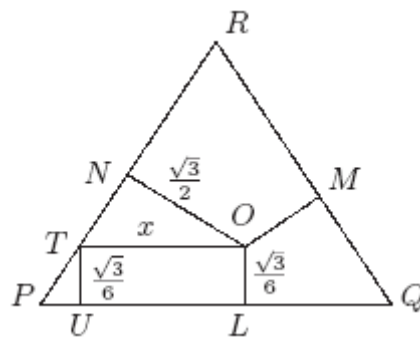
$$= 10 \times 200 = 16 \times 125 = 20 \times 100 = 25 \times 80 = 40 \times 50$$

故可能滿足 x 、 y 為正整數的只有 $3x^2 - 8 = 40$ 、 $y^2 + 1 = 50$ 。因此 $x = 4$ 、 $y = 7$ 且 $xy = 28$ 。

答案：28

29. 【方法一】

取正三角形 PQR 的邊長為 2 單位，則高為 $\sqrt{3}$ 單位且面積為 $\sqrt{3}$ 平方單位。如右圖，作 OT 平行 QP 與 RP 交於 T 點，再作 TU 垂直 PQ 交 PQ 於 U 點，令 $OT = x$ 。因正三角形 PQR 的面積即為 $\triangle POQ$ 、 $\triangle QOR$ 以及 $\triangle ROP$ 三個三角形的面積和，故 $\triangle POQ$ 、 $\triangle QOR$ 以及 $\triangle ROP$ 的高之和為



正三角形 PQR 的高，即 $\sqrt{3}$ 單位，也因此知 $OL = \frac{\sqrt{3}}{6}$ 單位、 $ON = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 單位。

因 $\triangle ONT$ 與 $\triangle TPU$ 的內角都是 30° 、 60° 與 90° ，可知 $\frac{\sqrt{3}}{2} \div x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，即 $x = 1$ ，

故 $\triangle ONT$ 的面積為 $\frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{8}$ 平方單位。從 $\triangle TPU$ 的內角是 30° 、 60°

與 90° 可知 $\frac{\sqrt{3}}{6} = \sqrt{3}$ ，因此 $PU = \frac{1}{6}$ 單位且 $\triangle TPU$ 的面積為 $\frac{1}{2} \times \frac{1}{6} \times \frac{\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{72}$ 平方單位。

而矩形 $OTUL$ 的面積為 $1 \times \frac{\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{6}$ 平方單位，故四邊形 $LONP$ 的面積為

$$\frac{\sqrt{3}}{8} + \frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{\sqrt{3}}{72} = \frac{22\sqrt{3}}{72} = \frac{11\sqrt{3}}{36} \text{ 平方單位。}$$

$$\text{故 } \frac{\text{四邊形 } LONP \text{ 的面積}}{\text{三角形 } PQR \text{ 的面積}} = \frac{\frac{11\sqrt{3}}{36}}{\sqrt{3}} = \frac{11}{36}, \text{ 故所求為 } 36 + 11 = 47$$

【方法二】

如右圖，令 Δ_1 、 Δ_2 及 Δ_3 分別為所在之四邊形區域的面積，各線段長度如圖所標示。則可知

$$2\Delta_1 = a + 3f$$

$$2\Delta_2 = b + 2c$$

$$2\Delta_3 = 2d + 3e$$

而 $\frac{\text{四邊形}LONP\text{的面積}}{\text{三角形}PQR\text{的面積}} = \frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3}$ 。因此須分別計算出 a 、 b 、 c 、 d 、 e 、 f 之值。

作 $OX \parallel PR$ 交 PL 於 X 、 $OT \parallel PQ$ 交 PN 於 T 。

則 $XL = \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$ 、 $\frac{ON}{TO} = \cos 30^\circ$ 即

$$TO = XP = \frac{3}{\cos 30^\circ} = \frac{6}{\sqrt{3}}, \text{ 故 } a = PL = \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{6}{\sqrt{3}} = \frac{7}{\sqrt{3}};$$

同樣的想法，知 $\frac{TN}{3} = \tan 30^\circ$ 即 $TN = \frac{3}{\sqrt{3}}$ 、

$$\frac{1}{XO} = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ 即 } PT = XO = \frac{2}{\sqrt{3}}, \text{ 故 } f = PN = \frac{3}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{5}{\sqrt{3}};$$

繼續可推知 $b = \frac{5}{\sqrt{3}}$ 、 $c = \frac{4}{\sqrt{3}}$ 、 $d = \frac{8}{\sqrt{3}}$ 及 $e = \frac{7}{\sqrt{3}}$ ，故

$$\frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3} = \frac{a + 3f}{a + 3f + 2d + 3e + b + 2c} = \frac{\frac{7+15}{\sqrt{3}}}{\frac{7+15+16+21+5+8}{\sqrt{3}}} = \frac{22}{72} = \frac{11}{36}$$

因此所求為 $36+11=47$

【方法三】

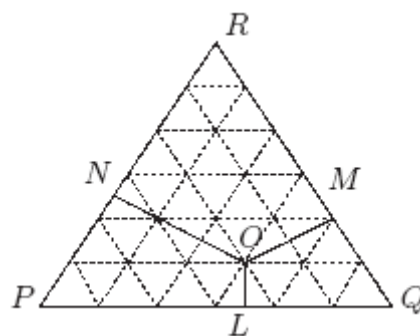
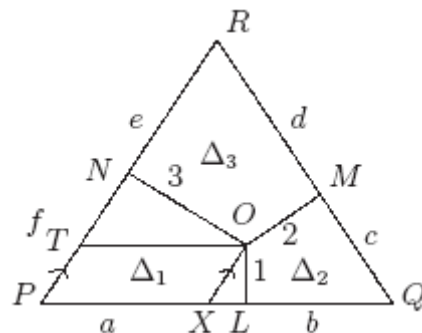
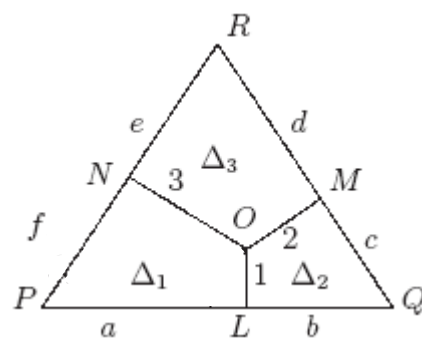
令正三角形 PQR 的高為 h ，因正三角形 PQR 的面積即為 $\triangle POQ$ 、 $\triangle QOR$ 以及 $\triangle ROP$ 三個三角形的面積和，故正三角形 PQR 的高為 $\triangle POQ$ 、 $\triangle QOR$ 以及 $\triangle ROP$ 的高之和，即

$$h = OL + OM + ON = 6OL, \text{ 故 } OL = \frac{h}{6}、OM = \frac{h}{3}、$$

$$ON = \frac{h}{2}。因此可用高為 OL 之小正三角形將正三$$

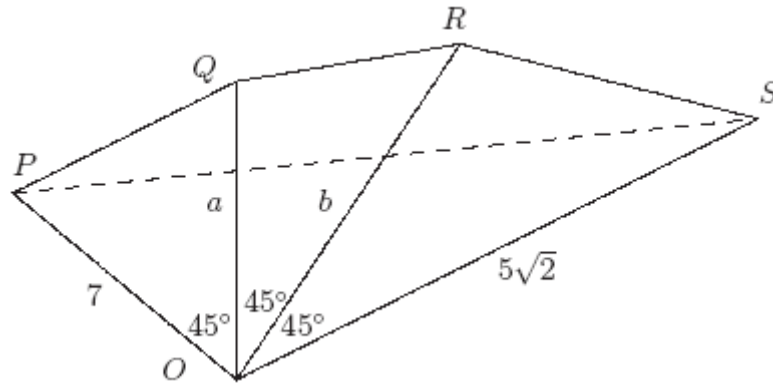
角形 PQR 切割為如右圖之情況， O 點恰在「格點」上。透過計算每一塊區域所含有的小三角形數目，可知四邊形 $OLPN$ 之面積為正三角形 PQR 之面積的

$\frac{11}{36}$ ，因此所求為 $36+11=47$



答案：47

30. 考慮如下圖所示的多邊形 $OPQRS$ ，其中 $OP=7$ 、 $OQ=a$ 、 $OR=b$ 、 $OS=5\sqrt{2}$ 及 $\angle POQ = \angle QOR = \angle ROS = 45^\circ$ 。



則由餘弦定理可知

$$PQ = \sqrt{49 + a^2 - 7\sqrt{2}a} \quad , \quad QR = \sqrt{a^2 + b^2 - \sqrt{2}ab} \quad \text{以及} \quad RS = \sqrt{50 + b^2 - 10b}$$

由三角不等式可知 $PQ+QR+RS$ 的極小值是 PS ，且再由餘弦定理可知

$$PS = \sqrt{OP^2 + OS^2 + \sqrt{2} \times OP \times OS} = \sqrt{49 + 50 + 70} = 13$$

因此極小值為 13。

答案：13