

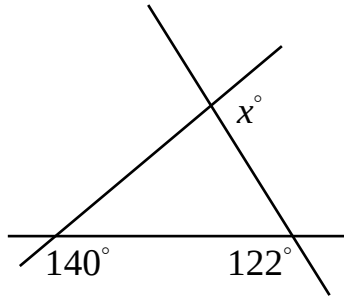
高級卷(11-12 年級)

1. $(2000+9)-(2000-9)=2000+9-2000+9=18$ 。

答案：(E)

2. (同中級卷第 2 題)

$$360-140-122=98。$$



答案：(E)

3. $-1=-2k \Rightarrow k=\frac{1}{2}$ 。

答案：(D)

4. $(0.6)^{-2}=\left(\frac{3}{5}\right)^{-2}=\left(\frac{5}{3}\right)^2=\frac{25}{9}$ 。

答案：(D)

5. (同中級卷第 7 題)

$$\text{原式}=x-y-2y+2z+3z-3x=-2x-3y+5z。$$

答案：(A)

6. $1+2+\cdots+12+13+12+11+\cdots+2+1=13^2=169$ ， $200-169=31$ 。

答案：(B)

7. $1*(2*3)=1*(2+\frac{1}{3})=1*\frac{7}{3}=1+\frac{3}{7}=\frac{10}{7}$ 。

答案：(B)

8. 當 $x=1$ ， $y=a+b+c>0$ ；當 $x=-1$ ， $y=a-b+c>0$ ，即 $-a+b-c<0$ ；因為對稱圖形，故 $b=0$ ，因此當 $x=0$ 時， $y=c>0$ ，再因圖形開口向下知 $a<0$ ，故 $a+b-c<0$ 。

答案：(B)

9. (同中級卷第 11 題)

可知搭巴士上學的學生共有 $1000 \times \frac{1}{4} = 250$ 名，男學生有 $1000 - 570 = 430$ 名，其中 $430 - 313 = 117$ 名搭巴士，故有 $250 - 117 = 133$ 名女學生搭巴士上學。

答案：(E)

10. 取出二頂藍色帽子之機率為 $\frac{6}{9} \times \frac{5}{8} = \frac{30}{72} = \frac{5}{12}$ 、取出二頂紅色帽子之機率為

$$\frac{3}{9} \times \frac{2}{8} = \frac{6}{72} = \frac{1}{12} \text{、故取出二頂同色帽子之機率為 } \frac{5}{12} + \frac{1}{12} = \frac{1}{2} \text{。}$$

答案：(A)

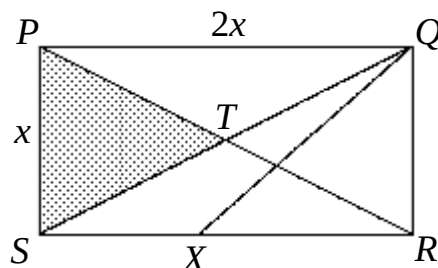
11. 直線通過 $(0, 0)$ 與 $(1\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ ，故 $y = \frac{1}{3}x$ 。

答案：(B)

12. 五邊形 $PQRST$ 為 $\frac{3}{4}$ 矩形面積，故 $\triangle QRX$ 之面積為

$$\frac{3}{8} \text{ 矩形面積，故 } \frac{1}{2} XR \times QR = \frac{3}{8} PQ \times QR = \frac{3}{8} x \times 2x \text{，}$$

$$\text{即 } XR = \frac{3}{2}x$$



答案：(D)

13. $5^x - 5^{x-2} = 5^x - \frac{5^x}{25} = \frac{24}{25} \times 5^x = 120\sqrt{5} \Rightarrow 5^x = 125\sqrt{5} = 5^{\frac{7}{2}}$ ，所以 $x = \frac{7}{2}$ ，即 $a+b=9$

答案：(D)

14. 因為 $7^2 < 50 < 8^2$ ，故 x 只能是 $0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm 7$ 或 y 只能是 $0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm 7$ 。當 x 是 $0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm 7$ 時， y 座標可為正數或負數，故有 30 個點，當 y 是 $0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm 7$ 時， x 座標可為正數或負數，故又有 30 個點，但其中有 $(\pm 1, \pm 7), (\pm 5, \pm 5), (\pm 7, \pm 1)$ 共 12 個點被重複算到，故共有 $30+30-12=48$ 個點滿足此條件。

答案：(C)

15. (同中級卷第 17 題)

第二個數、第四個數都比相鄰的數大，故一定有一數為 5，另一數是 3 或 4。

(i) $(a_1, 3, a_3, 5, a_5)$ 或 $(b_1, 5, b_3, 3, b_5)$ 的情況， a_1, a_3, b_3, b_5 均不可為 4，即 a_5, b_1 必為 4。因此 a_1, b_5 可能為 1 或 2，故共有 4 個「鳳眉排列」： $(1, 3, 2, 5, 4), (2, 3, 1, 5, 4), (4, 5, 1, 3, 2), (4, 5, 2, 3, 1)$ ；

(ii) $(a_1, 4, a_3, 5, a_5)$ 或 $(b_1, 5, b_3, 4, b_5)$ 的情況此時 1、2、3 可隨意排列，故共有 $2 \times 3 \times 2 \times 1 = 12$ 個「鳳眉排列」；

可知共有 $4+12=16$ 個「鳳眉排列」。

答案：(A)

16. 令 $x^2 - x = y$ ，則有 $y^2 - 18y + 72 = 0 \Rightarrow y = 12$ 或 6：

(i) $x^2 - x = 12 \Rightarrow x^2 - x - 12 = 0 \Rightarrow x = -3$ 或 4

(ii) $x^2 - x = 6 \Rightarrow x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow x = -2$ 或 3

因此所有正根之和為 7。

答案：(B)

答案：(D)

答案：(D)

答案：(B)

[illegible]

答案：(E)

答案：(D)

A diagram of a parallelogram with vertices labeled A (top-left), B (bottom-left), C (bottom-right), and D (top-right). Inside the parallelogram, there are six circles arranged in two rows of three. The circles are tangent to each other and to the sides of the parallelogram. The top row of circles is tangent to the top side AD , and the bottom row is tangent to the bottom side BC . The circles in each row are also tangent to the slanted sides AB and CD .

答案：(D)

23. (同中級卷第 24 題)

若 A 為忠臣，則 E 是叛徒，故 E 所說的話為假，即 D 是忠臣，此時由 D 說的話可知 B 是叛徒，再由 B 說的話得知 A 是叛徒，與假設矛盾；

若 A 是叛徒，則 F 是叛徒、E 是忠臣，此時由 F 說的話知 A 是叛徒、由 E 說的話知 D 是叛徒，再由 D 說的話得知 C 是叛徒、B 是忠臣，這時再從 C 的話知 F 是叛徒、B 是忠臣。

因此只有 B、E 是忠臣。

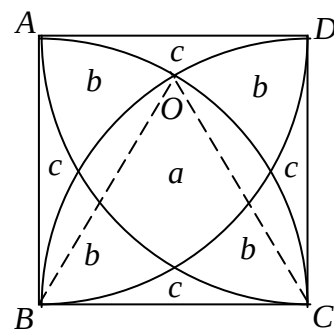
答案：(D)

24. 如圖， a 、 b 、 c 分別表示該區域之面積。

則知 $\triangle BOC = \frac{\sqrt{3}}{4}$ 、曲面 $BOC = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} = a + 2b + c$ 、

$$a + 4b + 4c = 1, a + 3b + 2c = \frac{\pi}{4}, b + c = \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{12},$$

$$\text{故 } a = 1 - \sqrt{3} + \frac{\pi}{3}$$



答案：(C)

$$25. f_n(x) = \frac{f_{n-1}(x) + 6}{f_{n-1}(x)} = x \Rightarrow x f_{n-1}(x) = f_{n-1}(x) + 6 \Rightarrow f_{n-1}(x) = \frac{6}{x-1} = x$$

$$\Rightarrow x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow x = -2 \text{ 或 } 3$$

答案：(A)

$$26. \frac{1}{x} + \frac{1}{2x} + \frac{1}{3x} + \frac{1}{y} = \frac{19}{20}. \text{ 當 } x=2 \text{ 時, } \frac{1}{y} = \frac{19}{20} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{1}{30}, \text{ 即 } y=30;$$

$$\text{當 } x=3 \text{ 時, } \frac{1}{y} = \frac{19}{20} - \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{9} = \frac{61}{180}, \text{ 即 } y \text{ 不為整數, 故不合;}$$

$$\text{當 } x=4 \text{ 時, } \frac{1}{y} = \frac{19}{20} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} - \frac{1}{12} = \frac{59}{120}, \text{ 即 } y \text{ 不為整數, 故不合;}$$

$$\text{當 } x \geq 5 \text{ 時, } y \leq \frac{180}{117} < 2, \text{ 故不合;}$$

因此所求為 $2+4+6+30=42$ 。

答案：42

27. (同初級卷第 28 題、中級卷第 27 題)

$6n$ 必為偶數，且其數碼和必為 3 的倍數。

若 $6n$ 為上升數，它必須是三位數以上；

若 $6n$ 的末位數為 4，則 n 的末位數必為 4 或 9；

若 $6n$ 的末位數為 6，則 n 的末位數必為 6；

若 $6n$ 的末位數為 8，則 n 的末位數必為 3 或 8；

當 n 的末位數為 3，則只有 123 是上升數，但 $123 \times 6 = 738$ 不是上升數；

當 n 的末位數為 4，則只有 124、134、234 是上升數，但 $124 \times 6 = 744$ 、 $134 \times 6 = 804$ 、 $234 \times 6 = 1404$ 均不是上升數；

當 n 的末位數為 6，則 n 與 $6n$ 之值為

n	$6n$	n	$6n$
126	756	246	1476
136	816	256	1536
146	876	346	2076
156	936	356	2136
236	1416	456	2736

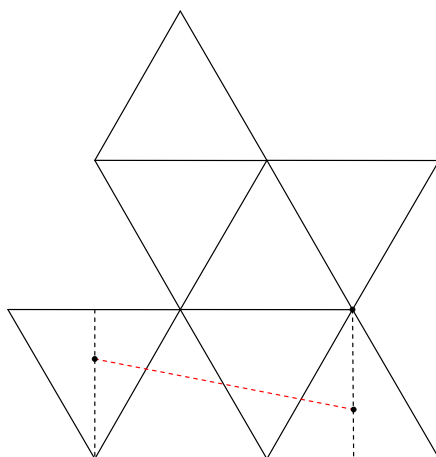
均不合題意；

當 n 的末位數為 8 時，因 $6 \times 8 = 48$ ，即 $6n$ 的個位數必有進位 4 到十位數，因此若 $6n$ 也是上升數，則 6 乘 n 的十位數之末位數必為 0 或 2：

- (i) 若是 0，則 n 的十位數為 5 且因 $6 \times 5 = 30$ ，即 $6n$ 的十位數必有進位 3 到百位數，而此時因 $6n$ 的十位數是 4 可推知 6 乘 n 的百位數之末位數必為 0，故 n 的百位數為 5，但 $558 \times 6 = 3348$ 不是上升數；
- (ii) 若是 2，則 n 的十位數為 2 或 7，但因 $128 \times 6 = 768$ 不是上升數，所以 n 的十位數為 7。而此時因 $6 \times 7 = 42$ ，即 $6n$ 的十位數必有進位 4 到百位數，而此時因 $6n$ 的十位數是 6 可推知 6 乘 n 的百位數之末位數必為 0，故 n 的百位數為 5，即 $n = 578$ 。驗算可知 $578 \times 6 = 3468$ 為上升數。

答案：578

28. 將正八面體展開如下圖，路徑即為紅虛線：



因此所求之值為 $(6+3)^2 + \left(\frac{2}{3} \times 3\sqrt{3} - \frac{1}{3} \times 3\sqrt{3} \right)^2 = 84$

答案：84

29. (同中級卷第 30 題)

可假設環線鐵路為圓形，則二個車站間的距離與該二個車站間所夾的劣角成正比，即找二個相鄰車站間的最長距離便是找二個相鄰車站間的所夾的劣角中最大值。

令 C 公司的五座車站為依序為 C_1 、 C_2 、 C_3 、 C_4 、 C_5 ，則可知 C 公司相鄰的兩座車站間所夾的角度為 72° ；

令 B 公司的四座車站為依序為 B_1 、 B_2 、 B_3 、 B_4 ，則可知 B 公司相鄰的兩座車站間所夾的角度為 90° ，且 C 公司必有一組相鄰的兩座車站間沒有 B 公司的車站，假設這一組 C 公司相鄰的兩座車站為 C_1 、 C_5 及 B_1 位於 C_1 、 C_2 間並

與 C_1 車站間所夾的角度為 x° 。此時可知 $x \leq 18$ ，否則 B_4 會位於 C_1 、 C_5 間且 C 公司會有另一組相鄰的兩座車站間沒有 B 公司的車站

令 A 公司的三座車站為依序為 A_1 、 A_2 、 A_3 ，則可知 A 公司相鄰的兩座車站間所夾的角度為 120° 。因要找出這三家公司要使他們各相鄰車站間的最小之最長距離，所以此時 C_1 、 C_5 間必須要有一座 A 公司的車站，令其為 A_1 車站且與 C_1 車站間所夾的角度為 y° 。

若 $y < 24$ 且 $x + y < 30$ ，則如圖 1 可知 A_3 車站位於 B_4 與 C_4 車站間。

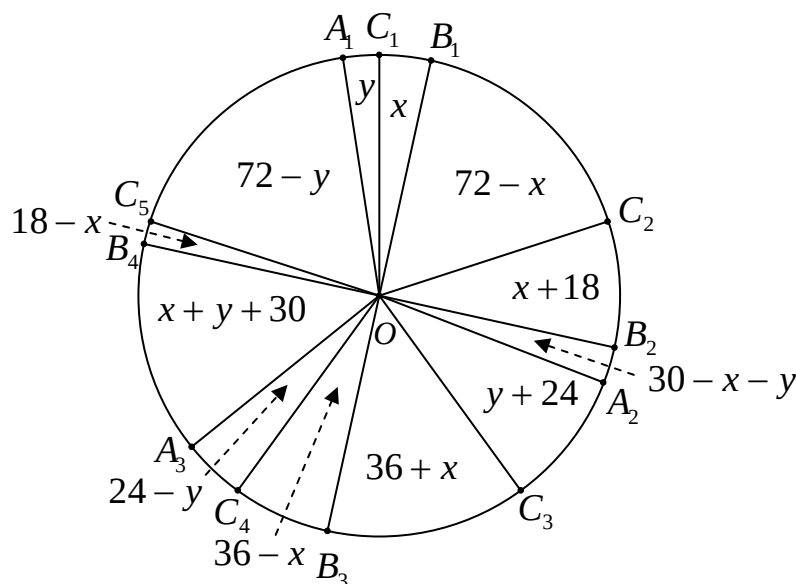


圖 1

若 $y < 24$ 且 $x + y > 30$ ，則如圖 2 可知 A_2 車站位於 B_2 與 C_2 車站間。

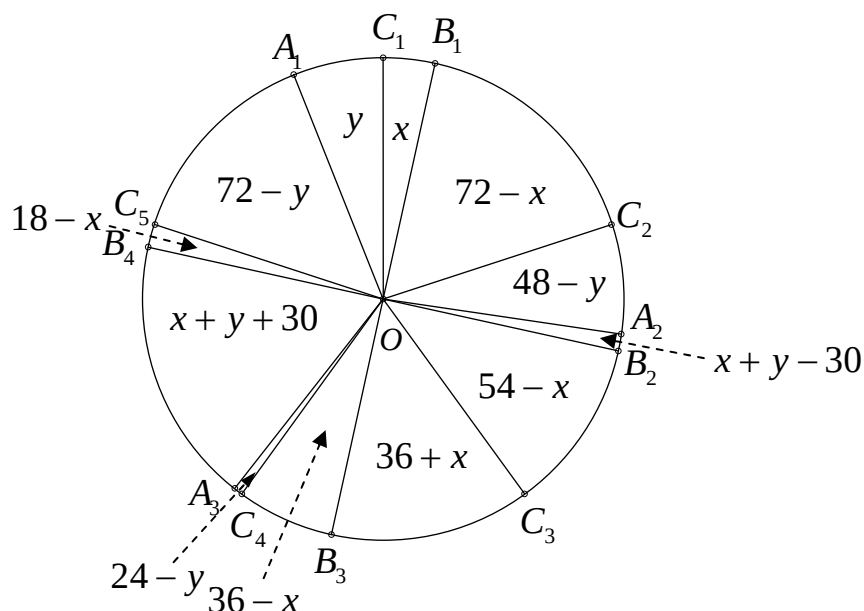


圖 2

在這兩種情況中，可知最大角為 $x+y+30$ 、 $72-x$ 、 $72-y$ 這三個之一。因要找出可能發生的最大角中的最小值，故可得 $x+y+30=72-x=72-y$ ，因此 $x=y=14$ 且知此時的最大角為 58° 。

若 $24 \leq y \leq 48$ ，則如圖 3 可知 A_3 車站位於 B_3 與 C_2 車站間。

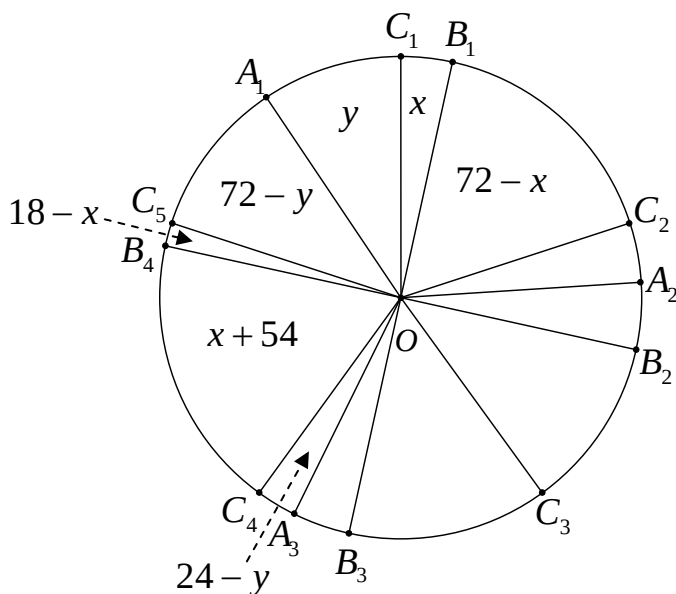


圖 3

此時 $72-x$ 與 $x+54$ 這兩個角的角度必大於 58° ，故不為最小值。

若 $48 < y < 72$ ，則如圖 4 可知 A_2 車站位於 B_1 與 C_2 車站間且 A_3 車站位於 B_3 與 C_3 車站間。

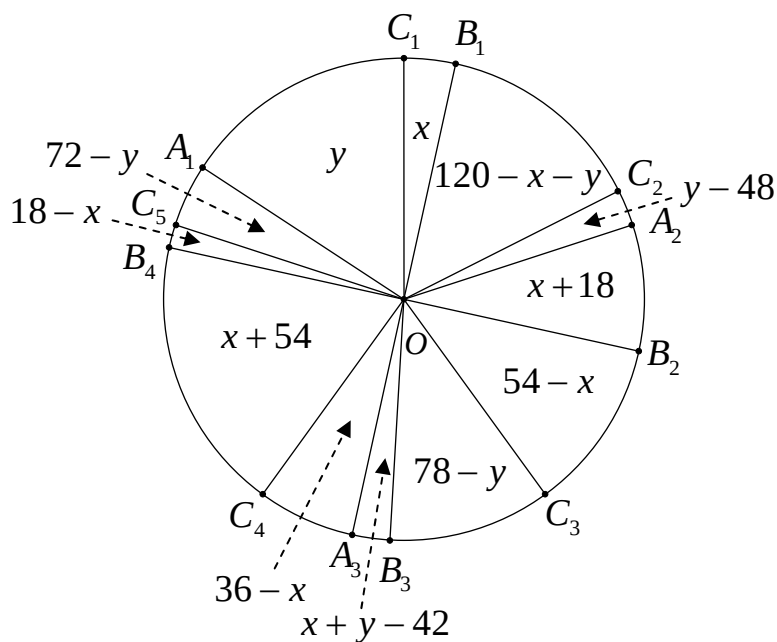


圖 4

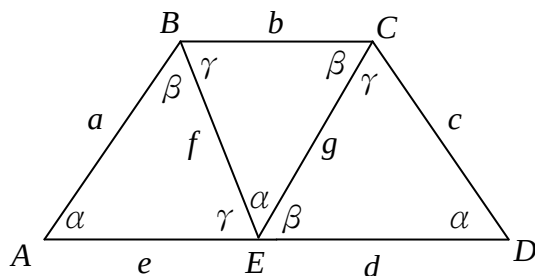
可知最大角為 $x+54$ 、 $120-x-y$ 、 y 這三個之一。因要找出可能發生的最大角中的最小值，故可得 $x+54=120-x-y=y$ ，因此 $x=4$ 、 $y=58$ 且知此時的最大角為 58° 。故所求為 $\frac{58^\circ}{360^\circ} \times 1080 = 174$ 公里

答案：174

30. 【方法一】

可知四邊形 $ABCE$ 與 $BCDE$ 都不是平行四邊形，因此可得到下圖各角的關係，其中 a 、 b 、 c 、 d 、 e 、 f 、 g 為所在之邊的長度而 α 、 β 、 γ 為所標示之

角的角度：



因三角形的邊長都是整數，故由三個三角形的相似關係可得以下比例式：

$$a : e : f = g : f : b = d : c : g = p : q : r$$

其中 p 、 q 、 r 為一組互質的畢氏數。

$$\text{因 } \frac{d}{e} = \frac{d}{g} \times \frac{g}{f} \times \frac{f}{e} = \frac{p}{r} \times \frac{p}{q} \times \frac{r}{q} = \frac{p^2}{q^2},$$

$$\text{所以可知 } 2009 = d + e = \frac{p^2}{q^2} \times e + e = \frac{p^2 + q^2}{q^2} \times e$$

$$\text{即 } 2009q^2 = (p^2 + q^2)e, \text{ 因此可得 } (p^2 + q^2) | 2009 \Rightarrow (p^2 + q^2) | 7^2 \times 41$$

若 $p^2 + q^2$ 不為 41，則 $p^2 + q^2$ 必為 7 的倍數，意即 $p^2 + q^2 \equiv 0 \pmod{7}$ ；又因完全平方數在模 7 的取值僅有 0、1、2、4，故 $p^2 \equiv q^2 \equiv 0 \pmod{7}$ ，即 p 、 q 有公因數 7，與 p 、 q 、 r 為一組互質的畢氏數矛盾。因此 $p^2 + q^2 = 41 = 4^2 + 5^2$ ，即 p 、 q 、 r 這一組互質的畢氏數為 3、4、5，其中 $r=3$ 。

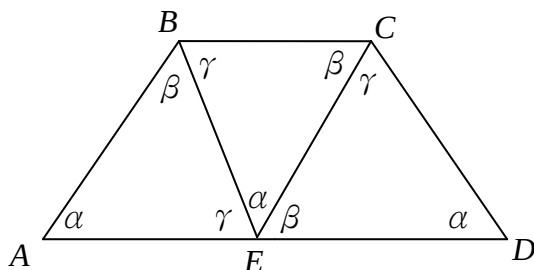
所以知 $a : e : f = g : f : b = d : c : g = 4 : 5 : 3$ 或

$$a : e : f = g : f : b = d : c : g = 5 : 4 : 3$$

$$\text{故 } BC = b = \frac{b}{f} \times \frac{f}{e} \times \frac{e}{2009} \times 2009 = \frac{r}{q} \times \frac{r}{q} \times \frac{q^2}{p^2 + q^2} \times 2009 = \frac{r^2}{p^2 + q^2} \times 2009 = 441$$

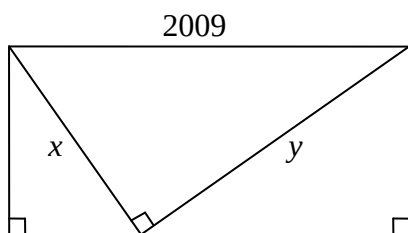
【方法二】

可知四邊形 $ABCE$ 與 $BCDE$ 都不是平行四邊形，因此可得到下圖各角的關係，其中 α 、 β 、 γ 為所標示之角的角度：

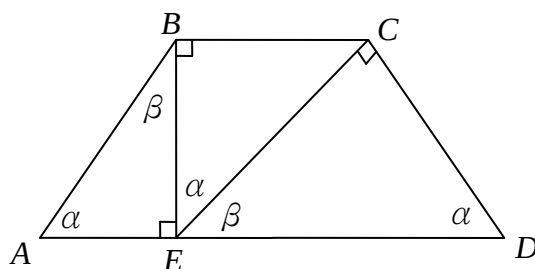


可知 $\alpha = 90^\circ$ 或 $\gamma = 90^\circ$ ($\beta = 90^\circ$ 之情況為 $\gamma = 90^\circ$ 之情況的反射，故視為同類型)

若 $\alpha = 90^\circ$ ，則為下圖：

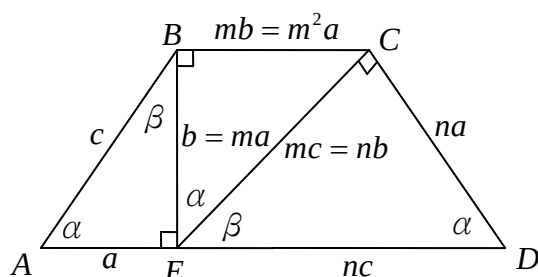


因此有 $x^2 + y^2 = 2009$ 。但因 $x^2 + y^2 = 2009$ 無整數解，故不合；
若 $\gamma = 90^\circ$ ，則為下圖：



其中 $\triangle AEB \sim \triangle EBC \sim \triangle DCE$ 。

因此由相似關係知若令 $AB=a$ 、 $BE=b$ 、 $BC=c$ 必存在有理數 m 、 n 使得 $EB=ma$ 、 $BC=mb$ 、 $CE=mc$ 且 $CD=na$ 、 $CE=nb$ 、 $DE=nc$



故知 $a + nc = 2009 \Rightarrow a + n^2 a = 2009$ (因 $mc = nb = nma \Rightarrow c = na$)。

令 $n = \frac{p}{q}$ ，其中 p 、 q 為互質的整數，則知

$$a \left(1 + \frac{p^2}{q^2} \right) = 2009 \Rightarrow a(p^2 + q^2) = 2009q^2$$

故知 $q^2 \mid a$ 且 $(p^2 + q^2) \mid 2009 \Rightarrow (p^2 + q^2) \mid 7^2 \times 41$ 。由【方法一】知 $n = \frac{4}{5}$ 或 $\frac{5}{4}$ 。

因 $EC > BE$ ，故 $n = \frac{5}{4}$ ，故可得

$$a = \frac{2009}{1 + n^2} = 784$$

$$nc = 2009 - a$$

$$c = \frac{4}{5}(2009 - 784) = 980$$

$$b^2 = c^2 - a^2 = (c + a)(c - a) = 1764 \times 196 = 42^2 \times 14^2$$

$$b = 588$$

$$\text{所以 } m = \frac{b}{a} = \frac{588}{784} = \frac{3}{4} \text{ 且 } BC = mb = 441$$

答案：441