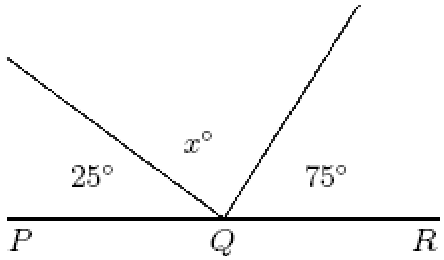
中級卷(9-10 年級)

1. $\frac{8\times 9}{3}=8\times 3=24$。

答案：(C)

2. 因為 PQR 為一直線，故 $x+25+75=180$，$x=180-100=80$。



答案：(C)

3.
$$110+x=97+y,$$
$$110-97+x=y,$$
$$13+x=y。$$

答案：(A)

4. 每包＄1.35 的巧克力 2 包共值＄2.70，所以他支付＄5 時應找回＄2.30。

答案：(E)

5. 可知 $\frac{7}{15}$、$\frac{3}{7}$ 以及 $\frac{4}{9}$ 都比 $\frac{1}{2}$ 小，而 $\frac{6}{11}>\frac{1}{2}$，故最大的分數為 $\frac{6}{11}$。

答案：(C)

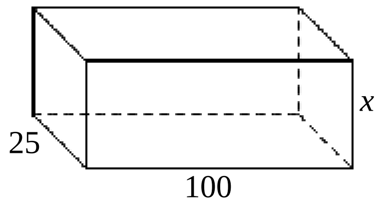
6. 這十個人共重 $64\times 10=640$ kg，男生們的體重合計為 $4\times 70=280$ kg，所以女生們的總體重為 $640-280=360$ kg，因此女生的平均體重為 $360\div 6=60$ kg。

答案：(C)

7. 通話時間為 $6.23\div 0.89=7$ 分鐘，故在 11：04 am 結束通話。

答案：(C)

8. 令魚缸高為 x cm，寬為 25 cm。因 1L＝1000 cm^3，故它可裝 55000 cm^3 的水。



即 $25\times 100\times x=55000$，所以 $x=\frac{55000}{2500}=22$。

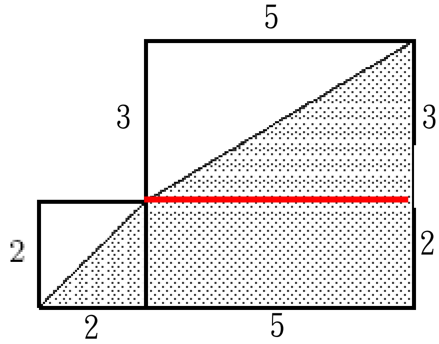
答案：(B)

9. 令較小的數為 x，則較大的數為 $2x+3$。因此 $x+2x+3=18$，可得 $3x=15$，$x=5$。

答案：(C)

10. 陰影部分的面積為 2×2 正方形面積的一半、3×5 矩形面積的一半以及 2×5 矩

形全部的面積組合而成。因此陰影部分的面積為 $\frac{1}{2}\times4+10+\frac{1}{2}\times5\times3=19.5$ 平方單位。



答案：(D)

11. 令原價為 x，則第一次減價 10%後變為 $0.9x$，接著第二次減價 20%後變為 $0.8\times0.9x$，再來第三次減價 50%後變為 $0.5\times0.8\times0.9x=0.36x$，也就是說連續減價後只剩原價的 36%，故相當於一次減價 64%。

答案：(A)

12. 完成圖如下：

	2		
			1
	1	3	
4			

→

	2		
			1
2	1	3	4
4			

→

	2		3
			1
2	1	3	4
4			2

→

1	2	4	3
			1
2	1	3	4
4			2

→

1	2	4	3
3			1
2	1	3	4
4			2

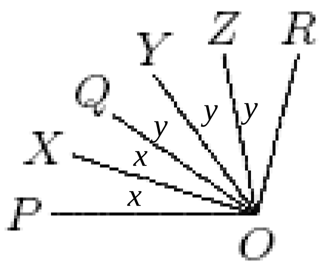
→

1	2	4	3
3	4	2	1
2	1	3	4
4	3	1	2

因此在角落的四個數之和為 1+4+2+3＝10。

答案：(E)

13. 令 $\angle POX=\angle QOX=x^\circ$ 以及 $\angle QOY=\angle YOZ=\angle ZOR=y^\circ$。

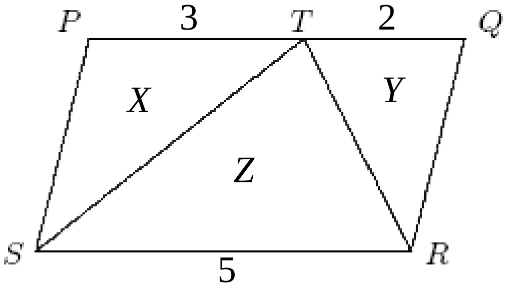


則有 $2x+y=33$ 以及 $x+2y=45$，解方程組可得 $x=7$、$y=19$，因此 $\angle POR=x^\circ+x^\circ+y^\circ+y^\circ+y^\circ=14^\circ+57^\circ=71^\circ$。

答案：(D)

14. 【方法一】

如下圖所示，令△PTS、△TQR、△RST 的面積分別為 X、Y 及 Z。



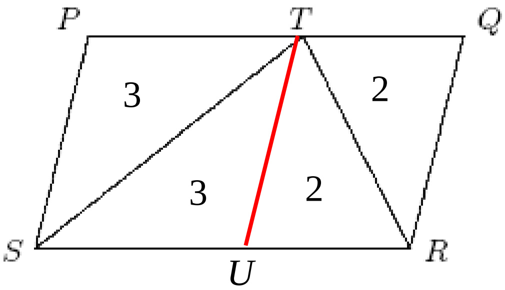
因為這三個三角形的高 h 都相同，所以 $X=\dfrac{3h}{2}$、$Y=\dfrac{2h}{2}$ 以及 $Z=\dfrac{5h}{2}$，故

$$\frac{X+Z}{X+Y+Z}=\frac{\frac{3h}{2}+\frac{5h}{2}}{\frac{3h}{2}+\frac{2h}{2}+\frac{5h}{2}}=\frac{4}{5}$$

答案：(D)

【方法二】

如下圖所示，過 T 點做一直線平行於 PS 交 SR 於 U



因為這四個三角形△PTS、△SUT、△TQR、△RUT 的高都相同，所以這四個三角形的面積比為△PTS：△SUT：△TQR：△RUT＝3：3：2：2，故所求為 $\dfrac{3+3+2}{3+3+2+2}=\dfrac{4}{5}$。

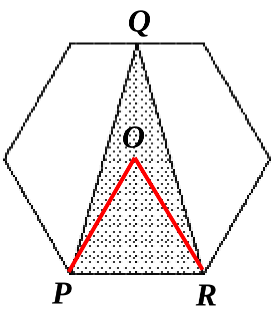
答案：(D)

15. 這樣的整數一定整除 45 且大於 5。因 45＝3×3×5，故這樣的整數為 3×3＝9、3×5＝15 或 3×3×5＝45 其中之一，共有 3 種可能性。

答案：(C)

16. 【方法一】

如下圖所示，令 O 點為正六邊形的中心，則正六邊形的面積為△POR 面積的 6 倍。

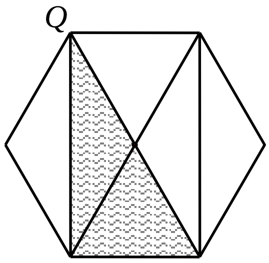


因為△PQR 與△POR 有相同的底邊且△PQR 的高是△POR 的高的 2 倍，故△PQR 的面積是△POR 面積的 2 倍。因此正六邊形的面積是△PQR 面積的 3 倍，即△PQR 的面積：正六邊形的面積＝1：3。

答案：(B)

【方法二】

無論如何移動 Q 點在該邊上的位置，斜線部分的面積都不會改變。



因此斜線部分的面積佔正六邊形面積的$\frac{1}{3}$。

答案：(B)

17. 【方法一】

令在第一列的學生數為 x。

若只有 2 列，則共有 $2x+3$ 個學生；若只有 3 列，則共有 $3x+9$ 個學生；
若只有 4 列，則共有 $4x+18$ 個學生；若只有 5 列，則共有 $5x+30$ 個學生；
若只有 6 列，則共有 $6x+45$ 個學生；若只有 7 列，則共有 $7x+63$ 個學生；
因現有 630 個學生，故：
只有 2 列時，$2x+3=630$，即 $2x=627$，不可能，但這不是答案的選項；
只有 3 列時，$3x+9=630$，即 $3x=621$，$x=207$，故可排成；
只有 4 列時，$4x+18=630$，即 $4x=612$，$x=153$，故可排成；
只有 5 列時，$5x+30=630$，即 $5x=600$，$x=120$，故可排成；
只有 6 列時，$6x+45=630$，即 $6x=585$，不可能；
只有 7 列時，$7x+63=630$，即 $7x=567$，$x=81$，故可排成。
故 6 列時是不可能排成的

答案：(D)

【方法二】

若可排成奇數列時，令共有 $2n+1$ 列，則中間列恰有$\frac{630}{2n+1}$個學生，故 $2n+1=1$、3、5、7、9、15。

若可排成偶數列時，令共有 $2n$ 列，則中間兩列的學生數之和為$\frac{630}{n}$個學生，且因連續兩列的學生數之和必為奇數，故 $n=2$、6、10，即 $2n=4$、12、20。因此選項中的 6 列是不可能排成的。

答案：(D)

18. 【方法一】

假設共有 n 個人參加賽跑，小杰是第 m 個跑到終點的人。因比他先抵達終

點的人數是比小杰後抵達終點的人數之一半，故有

$$n-m=2(m-1)，即\ n=3m-2。$$

小吉是第 $m+10$ 個抵達終點的人，故可知

$$m+9=2(n-(m+10))，即\ 2n=3m+29，$$

解以上方程組可得 $m=11$ 與 $n=31$。

答案：(E)

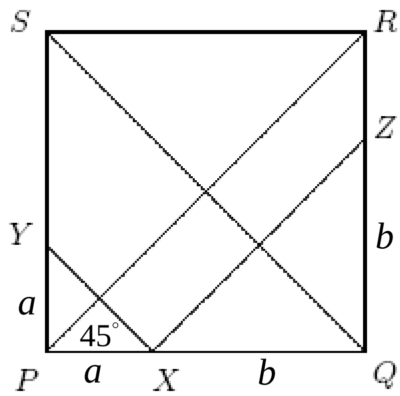
【方法二】

由對稱性來看，可知跑贏小杰的人數與跑輸小吉的人數一樣多。由 2：1 的比例來看，跑贏小杰的人數比介於小杰與小吉之間的人數還多 1。因此總人數為 10+1+9+1+10＝31 人。

答案：(E)

19. 【方法一】

可知道所有的角度都是 45°或 90°。令 $\overline{YP}=\overline{PX}=a$ 以及 $\overline{XQ}=\overline{QZ}=b$，則有 $a+b=\sqrt{3}$。



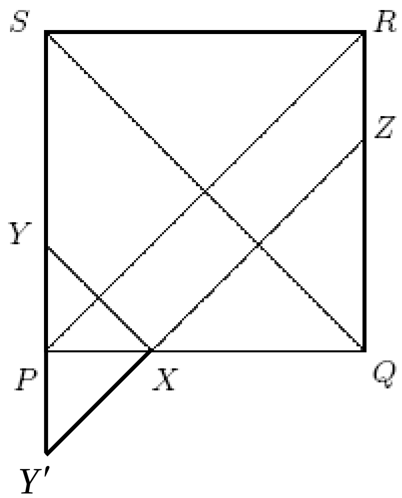
如此，由畢氏定理可得到 $\overline{YX}=\sqrt{2}\,a$ 以及 $\overline{XZ}=\sqrt{2}\,b$。

故 $\overline{YX}+\overline{XZ}=\sqrt{2}\,(a+b)=\sqrt{6}$

答案：(B)

【方法二】

如圖，延長 $\overline{ZX}$ 交 $\overline{SP}$ 的延長線於 Y'，$\angle XY'Y=\angle YPR=\angle XYY'=45^\circ$，易得知 $\overline{PY}=\overline{PY'}$。



則有 $\overline{YX}+\overline{XZ}=\overline{ZY'}=\overline{RP}=\sqrt{6}$

答案：(B)

【方法三】

因 X 是 $\overline{PQ}$ 上任意一點，可將 X 移動至 P 點上，則有：

$$\overline{YX}=0 \text{ 且 } \overline{XZ}=\overline{RP}=\sqrt{2}\times\sqrt{3}=\sqrt{6}\text{，}$$

故 $\overline{YX}+\overline{XZ}=\sqrt{6}$

答案：(B)

20. (1)A 說 B 是個說謊者。
(2) B 說 C 是個說謊者。
(3) C 說 D 是個說謊者。
(4) D 說 E 是個說謊者。

若 A 是說謊者，由（1）可知 B 是誠實者，再由（2）可知 C 是說謊者，接著由（3）知道 D 是誠實者，最後由（4）得知 E 是說謊者。故共有 3 個說謊者及 2 個誠實者。

若 A 是誠實者，由（1）可知 B 是說謊者，再由（2）可知 C 是誠實者，接著由（3）知道 D 是說謊者，最後由（4）得知 E 是誠實者。故共有 3 個誠實者及 2 個說謊者。

所以最多有 3 個說謊者。

答案：(C)

21. 若蕾絲在上世紀出生，則可假設是 1900+10a+b 年出生。故有

$$2007-(1900+10a+b)=2(1+9+a+b)$$
$$107-10a-b=20+2a+2b$$
$$87=12a+3b$$
$$29=4a+b$$

滿足上式的(a, b)有：(7, 1)、(6, 5)、(5, 9)，故有 1971、1965、1959 這三年滿足條件。

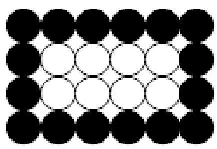
若蕾絲在這個世紀出生，則可假設是 2000+a 年出生。故有

$$2007-2000-a=2(2+0+0+a)$$
$$7-a=4+2a$$
$$3a=3$$
$$a=1$$

即 2001 年滿足條件。因此共有 4 種可能。

答案：(D)

22. 設白色籌碼是排成 $x\times y$ 的矩形，則加入黑色籌碼後的矩形為$(x+2)\times(y+2)$。因此可得：



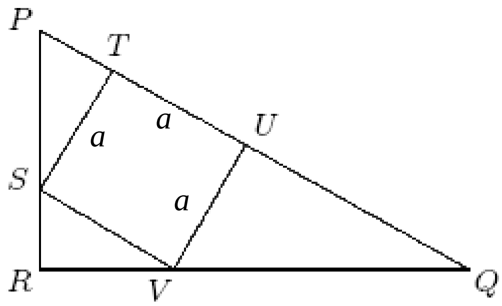
$$(x+2)(y+2)-xy=xy$$
$$2x+2y+4=xy$$
$$xy-2x-2y+4=8$$

$$(x-2)(y-2)=8$$

可能的組合有 $4\times2=8$ 及 $8\times1=8$。
若 $x-2=4$ 及 $y-2=2$，則 $x=6$、$y=4$。
若 $x-2=8$ 及 $y-2=1$，則 $x=10$、$y=3$。
故白色籌碼可能有 24 個或 30 個等二種可能。

答案：(C)

23. 【方法一】
如圖，令正方形 $STUV$ 的邊長為 a。



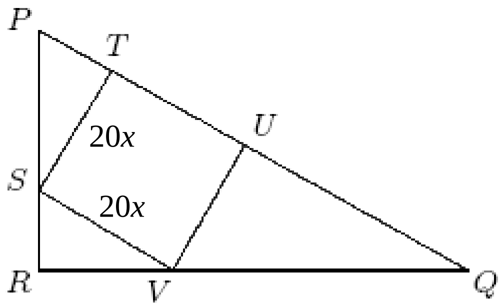
因為直角三角形 PQR 的三邊長比為 3：4：5，故直角三角形 PTS 與直角三角形 VUQ 的三邊長比也是 3：4：5，因此可得到 $\overline{PT}=\frac{3}{4}a$ 以及 $\overline{UQ}=\frac{4}{3}a$。
因 $\overline{PT}+\overline{TU}+\overline{UQ}=5$，所以 $\frac{3}{4}a+a+\frac{4}{3}a=5$，即 $a=\frac{60}{37}$。

答案：(D)

【方法二】
令 $\overline{ST}=\overline{SV}=20x$。由 $\triangle PTS$ 與 $\triangle SRV$ 是相似三角形可知 $\overline{PS}=20x\times\frac{5}{4}=25x$

以及 $\overline{RS}=20x\times\frac{3}{5}=12x$，

故 $\overline{PR}=37x$。



已知 $\overline{PR}=3$，故 $x=\frac{3}{37}$，可得 $\overline{ST}=\overline{SV}=20\times\frac{3}{37}=\frac{60}{37}$。

答案：(D)

24. 【方法一】
這四部電梯合計共可停 12 個樓層。假設該大樓有 6 層樓，則可知存在某一個樓層最多只會有 2 部電梯停留。因為每部電梯都是連接一個樓層至其他兩個樓層，所以該樓層只能夠連結其餘五個樓層中的四個，故該大樓不可能有 6 層樓。若該大樓有 7 層樓或 7 層樓以上，便可知必存在某一個樓層最多只會有 1 部電梯停留，因此這狀況也必不會成立。所以該大樓最多只會有 5 層樓。而大樓可以有 5 層樓，只要將這四部電梯依以下方式停留即可：
第一部電梯停留 1、4 和 5 樓，第二部電梯停留 2、4 和 5 樓，第三部電梯停留 3、4 和 5 樓，第四部電梯停留 1、2 和 3 樓。
因此該大樓最多可有 5 層樓。

答案：(B)

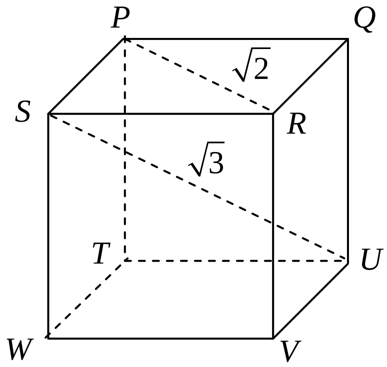
【方法二】

若一棟大樓有 n 層樓，則可知任意挑選兩層樓連接的方式共有 T_{n-1} 個，其中 T_{n-1} 為第 n 個三角數。

因這四部電梯合計共可停 12 個樓層，所以 $T_{n-1}<12$。已知 $T_4=10$ 以及 $T_5=15$，故 n 的最大值為 5。

答案：(B)

25. 如圖，令這正立方體為 $PQRSTUVW$



因為這隻蜜蜂打算用行走或飛行去經過每個頂點一次，所以蜜蜂的路徑必由 7 條直線所構成。可知正立方體的邊長為 1，每一面的對角線長度為 $\sqrt{2}$ 以及正立方體的斜對角線長度為 $\sqrt{3}$。

但蜜蜂的路徑中不能有多於 1 條的正立方體斜對角線，否則正立方體的中心點便會通過兩次，故蜜蜂的最長路徑為 $\sqrt{3}+6\sqrt{2}$，如以 $PRUWQTSV$ 的路徑行走即可。

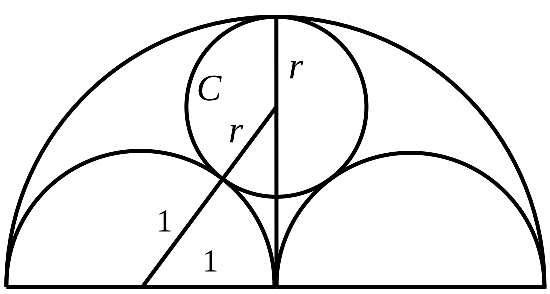
答案：(D)

26. 從 1、2、3、…、2006 中選出兩個奇數而可以配成和為 2008 的情況有：3+2005、5+2003、7+2001、…、1003+1005。

可觀察出第 n 組的被加數為 2n+1。因此當 2n+1=1003 時，n=501，所以可知共有 501 組。又因在所有的奇數中，無法找到一個奇數使得 1 加這個奇數的和為 2008，所以最多可以選到 502 個奇數使得從中任選二個奇數都無法讓這兩個奇數的和為 2008；換句話說，至少要選 503 個奇數才能保證其中必定存在有二個數之和為 2008。

答案：503

27. 令圓 C 的半徑為 r。如圖將半圓的圓心與圓 C 的圓心連接。則由畢氏定理可知：



$$1^2+(2-r)^2=(1+r)^2$$
$$1+4-4r+r^2=1+2r+r^2$$
$$6r=4$$
$$r=\frac{2}{3}=\frac{b}{a}$$

所以 $a+b=5$。

答案：5

28. 令 $10a+b$ 是一個一位數或二位數，則幸運數為 $10a+b=19(a+b)$。此式僅 $a=b=0$ 時成立。因此幸運數至少為三位數。

假設有一個幸運數是 m 位數。因該數至少為 10^{m-1} 且該數的各位數之和至多為 $9m$，故可知 $171m \geqq 10^{m-1}$。

當 $m=4$ 時，得 $684 \geqq 1000$，不合。故不存在四位數的幸運數。

當 $m \geqq 5$ 時，$171m \geqq 10^{m-1}$ 仍不會成立，故僅有三位數的幸運數。

令三位數的幸運數為 $100a+10b+c$，則有 $100a+10b+c=19a+19b+19c$，即 $9a=b+2c$。

當 $a=1$ 時，$(b, c)=(1, 4)$、$(3, 3)$、$(5, 2)$、$(7, 1)$或$(9, 0)$。

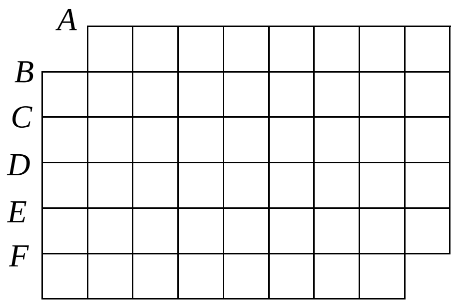
當 $a=2$ 時，$(b, c)=(0, 9)$、$(2, 8)$、$(4, 7)$、$(6, 6)$或$(8, 5)$。

當 $a=3$ 時，$(b, c)=(9, 9)$。

當 $a \geqq 4$ 時無解。故共有 11 個幸運數：114、133、152、171、190、209、228、247、266、285 與 399。

答案：11

29. 【方法一】如下圖，在六個交點上標示上 A、B、C、D、E、F：



1×1 的正方形：從 A 點開始橫著數共有 8 個，從 B 點開始橫著數共有 9 個，從 C 點開始橫著數共有 9 個，從 D 點開始橫著數共有 9 個，從 E 點開始橫著數共有 9 個，從 F 點開始橫著數共有 8 個；因此共有 52 個 1×1 的正方形。

2×2 的正方形：從 A 點開始橫著數共有 7 個，從 B 點開始橫著數共有 8 個，從 C 點開始橫著數共有 8 個，從 D 點開始橫著數共有 8 個，從 E 點開始橫著數共有 7 個；因此共有 38 個 2×2 的正方形。

3×3 的正方形：從 A 點開始橫著數共有 6 個，從 B 點開始橫著數共有 7 個，從 C 點開始橫著數共有 7 個，從 D 點開始橫著數共有 6 個；因此共有 26 個 3×3 的正方形。

4×4 的正方形：從 A 點開始橫著數共有 5 個，從 B 點開始橫著數共有 6 個，從 C 點開始橫著數共有 5 個；因此共有 16 個 4×4 的正方形。

5×5 的正方形：從 A 點開始橫著數共有 4 個，從 B 點開始橫著數共有 4 個；因此共有 8 個 5×5 的正方形。

6×6 的正方形：只有從 A 點開始橫著數的 2 個 6×6 的正方形。

因此共有 52＋38＋26＋16＋8＋2＝142 個正方形

答案：142

【方法二】

先將缺口的兩個正方形補回，則：
1×1 的正方形有 $6\times9=54$ 個，2×2 的正方形有 $5\times8=40$ 個，
3×3 的正方形有 $4\times7=28$ 個，4×4 的正方形有 $3\times6=18$ 個，
5×5 的正方形有 $2\times5=10$ 個，6×6 的正方形有 $1\times4=4$ 個。
所以共有 154 個正方形。

接著將補回的兩個正方形移去，則每一種狀況都會少了 2 個正方形，也就是說共少了 $2\times6=12$ 個正方形，因此共有 $154-12=142$ 個正方形。

答案：142

30. 可觀察出將計算器顛倒過來後數字仍可以讀的數為 0、1、2、5、6、8 與 9。因此若將計算器顛倒過來可讀的數依序列出，因各位數上會出現的數字都是由以上這七個數字所組成，因此可看成是七進制的數，而這個七進制的基底依序就是 0、1、2、5、6、8、9。因 $2007=5\times7^3+5\times7^2+6\times7+5$，故用七進制表示 2007 即為 5565。因這個七進制的 5 為十進制中的 8，七進制的 6 為十進制中的 9，故第 2007 個數為 8898，即末三位為 898。

答案：898