牌戲與數學

一、搶 24

計算 24 點是腦力遊戲，規則簡單，每個學過數學加、減、乘、除四則運算的學生都能玩。玩的次數愈多，愈會發現 1～10 的數字組合變化豐富，趣味無窮。

遊戲的基本玩法是將一副樸克牌中的 J、Q、K 牌拿掉，在剩下的 1～10 的 40 張樸克牌中隨意取出四張，把每張牌的點數用加、減、乘、除的方法，計算出答數 24。每張牌的點數只能計算一次，不能重複。運算中可使用小括號和中括號。

例如：6　6　2　10　=>　$6 + 6 + 2 + 10 = 24$

4　6　2　8　=>　$6 \div (4-2) \times 8 = 24$

24 點樸克牌遊戲既可以一人玩，也可以二人、三人、四人一起玩。二人玩時，每人各出二張牌；三人玩時，可輪流每次由一人出兩張牌，其他二人各出一張牌；四人玩時，每人分十張牌，每次隨意各出一張牌。在四人玩時，其中三人已叫好（算出答案），最後一個就是輸者，必須把四張牌拿進。輸者在拿進前有權讓先算出的三人中任何一人回答解題方法。被叫人須立即回答，不能再思考，如不能馬上回答就把這四張牌拿進；其他兩人不能代替回答，誰回答誰拿進四張牌，遊戲以先將手中牌脫手者爲勝。這裡特別強調的是四人必須統一時間出牌，可由一人喊一、二、三，同時出手。

計算 24 點的基本方法

(1) 最後一步成爲 $3 \times 8 = 24$，例如：9　6　3　8　　$9 \div (6-3) \times 8 = 24$

(2) 最後一步成爲 $4 \times 6 = 24$，例如：10　2　2　4　　$4 \times (10-2-2) = 24$

(3) 最後一步成爲 $2 \times 12 = 24$，例如：2　2　3　10　　$(10+3) \times 2 - 2 = 24$

利用以上三種基本方法及其衍生之許多解題的定式，可以說包括了計算 24 點的絕大部份解題方法。除了以上介紹的以外，其他還有一些解題方法，如全數相加和個別特殊的解題方法：

例 (1)：3　5　6　10　　$3 + 5 + 6 + 10 = 24$

例 (2)：7　7　2　1　　$(7 \times 7 - 1) \div 2 = 24$

例 (3)：5　7　9　2　　$5 \times 7 - 9 - 2 = 24$

相連數的計算方法

玩搶 24 點遊戲，經常出現四張牌中有二個數相連、三個數相連或四個數相連的情況，下面分別來介紹出現相連數的計算方法。

1. 二個相連數

四張牌中經常會出現這種情況，機率最高。能熟練地運用二個數相連的計算規律，可大大加快演算速度。

(a) 二相連數看成 1，例如：8　7　8　2　　$(8-7+2) \times 8 = 24$

(b) 二相連數可不作計算，例如：4　6　8　7　　$6 \times 4 \times (8-7) = 24$

從上面的例子我們已經知道當四張牌出現任何一組二個數相連，而另二張牌是 3 和 8，或 4 和 6 時即可解。根據二相連數看成 1 的原理，當四張牌有任何一組二個相連數而另二張牌有下列情況時可解：

例：8　9　7　3　　$[(9-8)+7]\times 3=24$
8　9　9　3　　$[9-(9-8)]\times 3=24$
8　9　8　2　　$(9-8+2)\times 8=24$
8　9　8　3　　$[(9-8)\times 8]\times 3=24$
8　9　8　4　　$[4-(9-8)]\times 8=24$
8　9　3　6　　$(9-8+3)\times 6=24$
8　9　4　6　　$[(9-8)\times 4]\times 6=24$
8　9　5　6　　$[5-(9-8)]\times 6=24$
8　9　5　4　　$(5+9-8)\times 4=24$
8　9　7　4　　$[7-(9-8)]\times 4=24$
上面各題中的一組相連數 8、9，可以換成其他任何一組二個相連數，解法均一樣。

2. 三個相連數
(a) 可看成三個相連數中最前面一個數
例：4　5　6　6　　$4\times 6\times(6-5)=24$
(b) 可看成三個相連數的中間一個數
例：2　3　4　8　　$8\times(4-3+2)=24$
(c) 可看成三個相連數中最後面一個數
例：2　3　4　6　　$4\times 6\times(3-2)=24$
(d) 可看成三個相連數中最前面一個數減去 1
例：4　5　6　8　　$[4-(6-5)]\times 8=24$
(e) 可看成三個相連數中最後面一個數加上 1
例：3　4　5　4　　$(4-3+5)\times 4=24$

從以上五例可以知道，當出現三個相連數時，既可以看成三個相連數中的任何一個，又可以看成三個相連數前後的任何一個，換句話說，可以把三個數看作五個數中的任意一個。例如出現 5、6、7 三個數相連時，你即可以把它看成 4、5、6、7、8 五個數中的其中一個，這時如另一張牌是 3 或是 4 或是 6 時，都可以計算成 24。

另外，三個數相連還可用以下方法計算：
(f) 可看成三個相連數中間一個數的二倍數
例：2　3　4　4　　$(4-2)\times 3\times 4=24$
(g) 可看成三個相連數中間一個數的三倍數
例：6　7　8　3　　$(6+7+8)+3=24$

3. 四個相連數

四個數相連出現的機率極少，一共只有七個組合，每個組合均可解，有的還有 2 個或 3 個解法。

例：1　2　3　4　　$(1+2+3)\times 4=24$

　　　　　　　　　$1\times 2\times 3\times 4=24$

　　2　3　4　5　　$(5+3-2)\times 4=24$

　　3　4　5　6　　$(5-4+3)\times 6=24$

相同數的計算方法

玩計算 24 點時，也經常出現二個以上相同的數。四張牌中的相同數有二個數相同、三個數相同和四個數相同的情況，下面就其速算方法分別作一介紹。

1. 二個數相同

這種情況在四張牌中出現的機率略低於二個數相連，出現的頻率也非常高。

(1) 二個相同數可看成 1

例：5　5　2　8　　$(5\div 5+2)\times 8=24$

　　7　7　3　6　　$(7\div 7+3)\times 6=24$

(2) 二個數相同看成 0

例：7　7　3　8　　$3\times 8-(5-5)=24$

　　9　9　4　6　　$4\times 6+(9-9)=24$

(3) 可看成二個相同數的和

例：5　5　2　7　　$5+5+2\times 7=24$

　　4　4　2　6　　$(4+4)\times 6\div 2=24$

(4) 可看成二相同數的乘積，數目較大時不宜採用。

例：5　5　2　1　　$5\times 5+1-2=24$

　　3　3　6　8　　$(3\times 3-6)\times 8=24$

從上面的例子我們已經知道，當四張牌中出現任何一對數相同時，另二張牌如是 3 和 8，或 4 和 6 時即可解。並且根據二個相同數可以看成 1 的道理，當四張牌中有二個相同數，而另二張牌有下列情況時可解：

例：9　9　7　3　　$(9\div 9+7)\times 3=24$

　　9　9　9　3　　$(9-9\div 9)\times 3=24$

　　9　9　2　8　　$(9\div 9+2)\times 8=24$

　　9　9　3　8　　$(9\div 9)\times 8\times 3=24$

　　9　9　4　8　　$(4-9\div 9)\times 8=24$

　　9　9　3　6　　$(9\div 9+3)\times 6=24$

　　9　9　5　6　　$(5-9\div 9)\times 6=24$

　　9　9　7　4　　$(7-9\div 9)\times 4=24$

　　9　9　6　4　　$9\div 9\times 6\times 4=24$

　　9　9　5　4　　$(9\div 9+5)\times 4=24$

這裡，9、9 一對相同數可以任意換成其他一對相同數，解法均一樣。

2. 三個數相同

(1) 三個數相同可看成其中一個數

上面已經講過，兩個數相同時可看成 0，同理，也可把三個相同數中的二個看成 0，留下一個相同數和另一個數計算。

例：3　3　3　8　　$(3-3)+3\times 8=24$

(2) 可以看成其中的 1 個數加上 1

例：7　7　7　3　　$(7+7\div 7)\times 3=24$

(3) 可以看成其中的 1 個數減去 1

例：5　5　5　6　　$(5-5\div 5)\times 6=24$

(4) 可以看成其中的 1 個數

例：3　3　3　8　　$(3\times 3\div 3)\times 8=24$

從上面例子可以知道，四張牌中出現三個相同數時，可看成三個不同的數。如出現 3 個 7 時，可看成 6、7、8，當另一個數是 3 或 4 時，應用此法就可解出。其他依次類推。

3. 四個數相同

四個數相同的機率較少，一共只有 10 個。這些組合中，只有四個 3、四個 4、四個 5 和四個 6 能夠求解，其餘的都沒有解。

例：3　3　3　3　　$3\times 3\times 3-3=24$

　　4　4　4　4　　$4\times 4+4+4=24$

1 的活用

在 24 點計算中，數字 1 扮演著極爲重要的角色。因爲 1 不僅可看成 1，用作與其他數字相乘或相除還可看成 0 (不作計算)。1 作爲 1 是奇數，作爲 0 時既不是奇數，也不是偶數。另外，從正負數角度看，1 可以看成三個數，即+1 、0、 −1。因此可以說 1～10 的不同數中 1 是最具靈活性的數，是運算過程中的潤滑劑，換句話說，有 1 出現的題目相對容易解答。

例如：　　　8　8　2　1　　$(2\times 8+8)\times 1=24$

　　　　　　9　1　1　2　　$(9-1)\times(1+2)=24$

難題的速算策略

所謂難題是相對而言的，一般是指四張牌中奇數較多或者是數字較大的情況。因爲計算時以搶時間、爭第一，大腦處於高度緊張狀態，在看到單數多和數字大時更爲緊張，心裡慌兮兮的，就會影響思路的展開。實際上難題與其它題目是一樣的，都只要通過三步運算就能求得答案。例如：出現 3、5、7 及 8 時，一般先預留 3 或 8 不動，將 5、7、8 或 3、5、7 處理成 8 或 3，用 3 乘於 8 等於 24 的方法。但這一步走不通時，就要穩住情緒，爭取時間，及早改變思路。

例如：3　5　7　8　　$3\times 7+(8-5)=24$

　　　　　　　　　　$5\times 7-3-8=24$

　　　9　9　3　3　　$(9\times 3)-(9\div 3)=24$

　　　　　　　　　　$9+3+9+3=24$

一題多解法

現在我們來講一道題目多種解法的問題。一道題目，有的只有一種解法，有的甚至解不出，但大多數的題目往往會有很多種解法，有的可達近十種。因此，在規定時間內，比解題

列式的多少，更是一種高級的比賽方法。

例如：1　2　3　8　　$(3+1)\times(8-2)=24$

$3\times8\times(2-1)=24$

$(3+1+8)\times2=24$

3　5　6　8　　$(6-5)\times3\times8=24$

$8\div(5-3)\times6=24$

這理需要說明的是，一題多解是指不同的解題方法，如僅僅是四個數字或加、減、乘、除四個符號前後移動換位，未作加、減、乘、除符號實質性改變的，不能作爲一種新的解題方法。

例如：3　8　1　1　　A　$3\times8\times1\times1=24$

B　$3\times8\div1\div1=24$

C　$3\times8\times1\div1=24$

D　$3\times8+1-1=24$

E　$(3-1+1)\times8=24$

F　$(8-1+1)\times3=24$

3、8、1、1 的基本解法有以上六種，但如能把數字和加、減、乘、除符號前後移動換位的話，那麼與 A 式相應的就有：$1\times1\times3\times8=24$、$1\times3\times8\times1=24$、$1\times3\times1\times8=24$、$1\times8\times1\times3=24$、$1\times8\times3\times1=24$、$8\times1\times1\times3=24$。

這些解題方法，都和 A 式相同，僅僅是數字和符號前後移動，不應作爲另一種新的解題方法來計算。

遊戲難易度的變化

上邊講的是 1～10 範圍內的 40 張牌，運用算術運算的“搶 24 遊戲”。你也可以將遊戲的方法改變一下，例如：將數的範圍擴大（含 J、Q、K 三種牌色，其中 J 作點數 11，Q 作點數 12，K 作點數 13 來計算。）；將運算的結果改成 12、36 等等，甚至 1 或 0。

例如：J　8　1　5　　$J+8+5\times1=24$

Q　2　3　4　　$Q\times2\times(4-3)=24$

K　J　7　8　　$K+J\times(8-7)=24$

當然在範圍擴大的計算中，也可以運用相同數、相連數的一些速算規則，您可以參考先前給的方法試試看，是否這些解題方法一樣可以套用呢？

分數解題法與乘、開方之運用

有時有些組合在運用前面所述方法仍不能求解，這時，學過分數、開方、乘方的同學，還可以用分數的計算方法或乘、開方的方法來解決部份題型。但是，這一類的題目一般難度很高，很需要動一番腦筋。

例如：(1) 1　3　4　6　　$6\div(1-3\div4)=24$

(2) 3　3　8　8　　$8\div(3-8\div3)=24$

(3) 1　6　6　8　　$6\div(1-6\div8)=24$

(4) 2　4　10　10　　$(4\div10+2)\times10=24$

(5) 2　5　5　10　　$5\times(5-2\div10)=24$

從例(1)到(3)的解題過程中可以發現，要在 $6\div$ ❙ 和 $8\div$ ❙ 中，找到 $\frac{1}{4}$ 和 $\frac{1}{3}$ 兩個分數，而這 $\frac{1}{4}$ 和 $\frac{1}{3}$ 是分別由 1、3、4 和 3、3、8 中巧算出來的。用分數來解題，必須熟悉以下能變程 24 的主要分數式，如：

$1\div\frac{1}{24}$、$2\div\frac{1}{12}$、$3\div\frac{1}{8}$、$4\div\frac{1}{6}$、$5\div\frac{5}{24}$、$6\div\frac{1}{4}$、$7\div\frac{7}{24}$、$8\div\frac{1}{3}$、$9\div\frac{3}{8}$、$10\div\frac{5}{12}\ldots$

等等。

對中學生來講，還可以利用乘、開方來解決一些四則運算不能解答的題目。具體的方法是將一個組合中的四個數，抽出其中一個作爲指數或根指數，並作一步運算，再加另外二步運算，完成解答。例如：

1	1	2	5	$5^2\times1-1=24$
2	6	5	5	$5^2+5-6=24$
1	3	5	5	$5^3\div5-1=24$
3	3	7	10	$(10-7)^3-3=24$
3	3	3	8	$\left(\sqrt[3]{8}\right)^3\times3=24$
3	4	8	8	$\left(8-\sqrt[3]{8}\right)\times6=24$

遊戲口訣

當你熟練地掌握了基本方法和其他一些方法後，有時就會一看到四張牌就知道能解。

24 點的計算口訣：

3、8、4、6 最基本，2 乘 12 不可忘；
相連相同都是 1，常見組合一百九；
1 經乘除看成 0，1 是最佳潤滑劑；
三位相連五個數，任君挑選變化多；
最佳組合廿餘組，一見就好爭第一；
思路轉換要靈活，切莫死鑽牛角尖。

問題演練：

用加、減、乘、除的計算方法，將下面四個數字組成答數爲 24 的等式。如果可能的話，請找出不同的解答方法。

(1) 3　7　3　1
(2) 3　6　6　1
(3) 2　10　2　1
(4) K　J　10　Q
(5) 5　7　9　2
(6) 4　6　8　7
(7) 8　9　5　6
(8) J　Q　K　1
(9) 1　4　6　8
(10) 9　9　7　4
(11) 5　5　5　6
(12) 3　9　1　2
(13) 1　4　5　6
(14) 3　3　7　7
(15) 1　3　7　9

二、洗牌

在實際的世界中，事實上是存在有某些動作是在時間上不可回溯的。譬如在不經意中，打散了一堆沙土，是不可能重新恢復到未打散前的狀態；但是，卻也有些存在奧妙的現象，緊抓住我們的目光，譬如魔術師在舞台上賣弄著雙手靈活的技巧，台下的驚嘆聲、讚美聲不斷地隨著他手中紙牌的變化產生！一副看似打散了的紙牌竟在手邊幾次洗牌後又回到最初它們排列的次序。是魔術師的雙手夠巧、有神通，還是背後有些規則？

將一疊 52 張的撲克牌，由上而下的排列方式共有$52\times51\times50\times\Lambda\times3\times2\times1$種，這是一個以數字 8 爲開頭的 68 位數。

在紙牌遊戲中，爲求公平性與公正性，通常會在遊戲開始發牌時，對手邊的牌進行「洗牌」的動作，使這些紙牌的排列規則避免掉人爲的操作，引起一些不公平的作弊行爲。那麼，什麼是「洗牌」呢？可以這麼說，洗牌就是改變撲克牌排列的順序。

所謂「洗牌」，是指：將一副牌一分爲二，一半置於左手邊，另一半於右手，把它們依序任意交錯合併爲一疊。完成這樣一次動作稱爲一次洗牌。

思考問題：

1. 能不能將一副牌經過適當安排，使得它經過一次任意的洗牌後，洗完牌後的這一疊牌由上而下依序每兩張牌都是一紅一黑的花色？
2. 能不能將一副牌經過適當安排，使得它經過一次任意的洗牌後，洗完牌後的這一疊牌由上而下依序每四張牌都有黑桃、紅心、方塊、梅花各一張？

專家洗牌法：

將一副牌一分爲二，一半置於左手邊，另一半於右手，由這兩疊牌依序各取一張牌互相交錯把它們合併爲一疊牌，稱爲專家洗牌法。任意張數的一疊牌經過若干次的專家洗牌法洗牌後，總可以使牌回復到原來的順序。

專家洗牌法又分爲外洗與內洗二種：

一、外洗：將一疊牌進行洗牌，原先在最頂端（或最上層）的牌，經過洗牌後仍然在新形成的一疊牌中的最頂端。也就是說，外洗是將任意張數將順序爲 1, 2, 3, …, $2n$ 的 $2n$ 張牌變成 $1, n+1, 2, n+2, \ldots, n, 2n$，即原先的後 n 張牌分別移至第 2, 4, …,$2n$ 張，而前 n 張牌，依照原來順序排在奇數位置 1, 3, 5, …, $2n-1$。

例如：1　2　3　**4**　**5**　**6**　**à**　1　**4**　2　**5**　3　**6**

1　2　3　**4**　**5**　**à**　1　**4**　2　**5**　3　（右手較多張）

二、內洗：將一疊牌進行洗牌，原先在最頂端（或最上層）的牌，經過洗牌後變成在新形成的一疊牌中的第二張。也就是說，內洗是將任意張數將順序爲 1, 2, 3, …, $2n$ 的 $2n$ 張牌變成$n+1, 1, n+2, 2, \ldots, n-1, 2n, n$，即原先的前 n 張牌移至第 2, 4, …,$2n$ 張，而其餘的 n 張牌，依照原來順序排在奇數位置 1, 3, 5, …, $2n-1$。

例如：1　2　3　**4**　**5**　**6**　**à**　**4**　1　**5**　2　**6**　3

1　2　**3**　**4**　**5**　**à**　**3**　1　**4**　2　**5**　（左手較多張）

下表為 2～52 張紙牌分別用外洗、內洗回復至原來順序所須的洗牌次數。

紙牌數	所須的洗牌次數		紙牌數	所須的洗牌次數	
	外洗	內洗		外洗	內洗
2	1	2	28	18	28
3	2	2	29	28	28
4	2	4	30	28	5
5	4	4	31	5	5
6	4	3	32	5	10
7	3	3	33	10	10
8	3	6	34	10	12
9	6	6	35	12	12
10	6	10	36	12	36
11	10	10	37	36	36
12	10	12	38	36	12
13	12	12	39	12	12
14	12	4	40	12	20
15	4	4	41	20	20
16	4	8	42	20	14
17	8	8	43	14	14
18	8	18	44	14	12
19	18	18	45	12	12
20	18	6	46	12	23
21	6	6	47	23	23
22	6	11	48	23	21
23	11	11	49	21	21
24	11	20	50	21	8
25	20	20	51	8	8
26	20	18	52	8	52
27	18	18			

仔細觀察上表可發現：

(1) $2n-1$張紙牌與$2n$張紙牌的外洗所須次數相同。

(2) $2n$張紙牌與$2n+1$張紙牌的內洗所須次數相同。

(3) 取 2, 4, 8, 16, 32,⋯ 2^k 張牌，其外洗的次數為 1, 2, 3, 4, 5,⋯ k；而內洗的次數為 2, 4, 6, 8, 10,⋯ $2k$。

(4) $2n$張紙牌內洗所須次數與$2n+2$張紙牌外洗所須次數相同。

(5) $2n$張紙牌外洗所須次數 x 滿足 $2^x \equiv 1 \pmod{2n-1}$。

(6) $2n$張紙牌內洗所須次數 x 滿足 $2^x \equiv 1 \pmod{2n+1}$。

(7) 適當地合併使用若干次內洗與外洗，您總可以把任意位置的牌送到任意位置。

例如：52 張牌外洗，因為 $2^8 \equiv 1 \pmod{51}$，所以只須洗 8 次即可回復原來的位置。

如何用數學來描述洗牌的動作：

為了有效地運用數學來描述洗牌動作，觀察 52 張紙牌進行外洗及內洗的結果，可以歸納得到下面結果：

外　洗	紙　牌　次　序	位　置
第 0 次	1　2　3　4　5　6　7 ⋯ 51　52	n
第 1 次	1　27　2　28　3　29 ⋯ 13　39　14　40 ⋯ 26　52	$(2n-1) \pmod{51}$
第 2 次	1　14　27　40　2 ⋯ 7　20　33　46　8　21　34　47　52	$(4n-3) \pmod{51}$
第 3 次	1　33　14　46　27　8　40　21　2 ⋯ 52	$(2^3(n-1)+1) \pmod{51}$
⋯	⋯ ⋯ ⋯ ⋯ ⋯ ⋯ ⋯ ⋯	⋯
第 k 次	1 ⋯ ⋯ ⋯ ⋯ ⋯ ⋯ ⋯ ⋯ ⋯ ⋯ ⋯ ⋯ 52	$(2^k(n-1)+1) \pmod{51}$

內　洗	紙　牌　次　序	位　置
第 0 次	1　2　3　4　5　6　7 ⋯ 51　52	n
第 1 次	27　1　28　2　29　3 ⋯ 13　40　14 ⋯ 52　26	$2n \pmod{53}$
第 2 次	40　27　14　1　41　28　15　2 ⋯ 13	$4n \pmod{53}$
⋯	⋯ ⋯ ⋯ ⋯ ⋯ ⋯ ⋯ ⋯	⋯
第 k 次	⋯ ⋯ ⋯ ⋯ ⋯ ⋯ ⋯ ⋯	$2^k n \pmod{53}$

此外，還有很多的方法可以將洗牌的流程表示清楚，這裡我們想到用矩陣來試一試。

矩陣：

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}_{4\times 4}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 0 & 5 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 7 & 0 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}_{4\times 6}, \ \ldots, \quad \mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}_{n\times n}$$

矩陣的乘法運算：

給定矩陣 $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m\times n}$ 與 $\mathbf{B} = (b_{ij})_{n\times k}$，在矩陣的運算中只有定義加、減法及乘法，並沒有給除法運算做出定義。若我們以矩陣 $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$ 來表示矩陣 $\mathbf{A}$ 與 $\mathbf{B}$ 的乘積，則有

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m\times n} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1k} \\ b_{21} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & \cdots & b_{nk} \end{pmatrix}_{n\times k} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1k} \\ c_{21} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & \cdots & c_{mk} \end{pmatrix}_{m\times k}$$

其中 $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$.

怎麼會想到用矩陣呢？

我們知道，在矩陣的運算中，矩陣的行、列置換的動作可以用來將另一個矩陣或向量作分量位置的互換，所以，我們想到將紙牌排成一列，表示成是一個$1\times n$的矩陣，而任意洗牌後的結果，紙牌數是不變量，會產生變化的是紙牌的前後排列次序，所以它也是一個$1\times n$的矩陣。利用單位矩陣 $\mathbf{I}$（即主對角線元素爲 1，其他元素爲 0 的矩陣，也就是說這個矩陣當$i = j$時，分量元素$a_{ij} = 1$；當$i \neq j$時，分量元素$a_{ij} = 0$）進行行、列置換產生的基本矩陣與$1\times n$的矩陣的乘積，我們可用來表示紙牌在外洗、內洗後的結果。例如：取六張紙牌爲一個1×6的矩陣：$\mathbf{a}$ (1, 2, 3, 4, 5, 6)，經過一次外洗後應該呈現 $\underline{\mathbf{a}}$ (1, 4, 2, 5, 3, 6)，可以表示如下：

$$\text{第一次外洗：}(1,2,3,4,5,6)\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&1&0\\0&1&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&1\end{pmatrix}=(1,4,2,5,3,6)$$

其中6×6的矩陣 $\mathbf{X}_1=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&1&0\\0&1&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&1\end{pmatrix}$（$\mathbf{X}_1$：1 表示一次洗牌動作）

就是將這六張牌做一次外洗牌的運算函數。取任何六張紙牌表示成1×6的矩陣，都可以在矩陣 $\mathbf{X}_1$ 的作用下得到它一次洗牌的結果。

再將上述1×6的矩陣(1, 4, 2, 5, 3, 6)在代入迭代式 $\mathbf{a}\,\mathbf{X}_1=\underline{\mathbf{a}}$ 中的 $\mathbf{a}$，可以算出(1, 2, 3, 4, 5, 6)經過二次外洗後所得的排列順序：$\underline{\mathbf{a}}$ (1, 5, 4, 3, 2, 6)，因此可以發現 $\mathbf{X}_2$ 的表示法：

$$\mathbf{X}_1^2=\mathbf{X}_2=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&0\\0&0&0&1&0&0\\0&0&1&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&1\end{pmatrix},\quad(1,2,3,4,5,6)\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&0\\0&0&0&1&0&0\\0&0&1&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&1\end{pmatrix}=(1,5,4,3,2,6).$$

依此法可以得出三次外洗、四次外洗牌等等的各個矩陣表示。同理，一次內洗的矩陣可以表示爲 $\mathbf{Y}_1$，如下：

$$\mathbf{Y}_1=\begin{pmatrix}0&1&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&1\\1&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&1&0\end{pmatrix}$$

所以(1, 2, 3, 4, 5, 6)的第一次內洗爲：

$$(1,2,3,4,5,6)\begin{pmatrix}0&1&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&1\\1&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&1&0\end{pmatrix}=(4,1,5,2,6,3)$$

思考問題：

前面提到，任意張數的一疊牌經過若干次的專家洗牌法洗牌後，總可以使牌回復到原來的順序。所以對列向量 **a** (1, 2, 3, 4, 5, 6)而言，必定存在某一個正整數 *n*，使得這六張牌洗牌 *n* 次後可以回到原來的順序，化成數學模式就是找出滿足下面等式的 *n* 值：

外洗：$\mathbf{a}\ \mathbf{X}_1^n=\mathbf{a}$，即 $\mathbf{X}_1^n=\mathbf{I}$

或

內洗：$\mathbf{a}\ \mathbf{Y}_1^n=\mathbf{a}$，即 $\mathbf{Y}_1^n=\mathbf{I}$

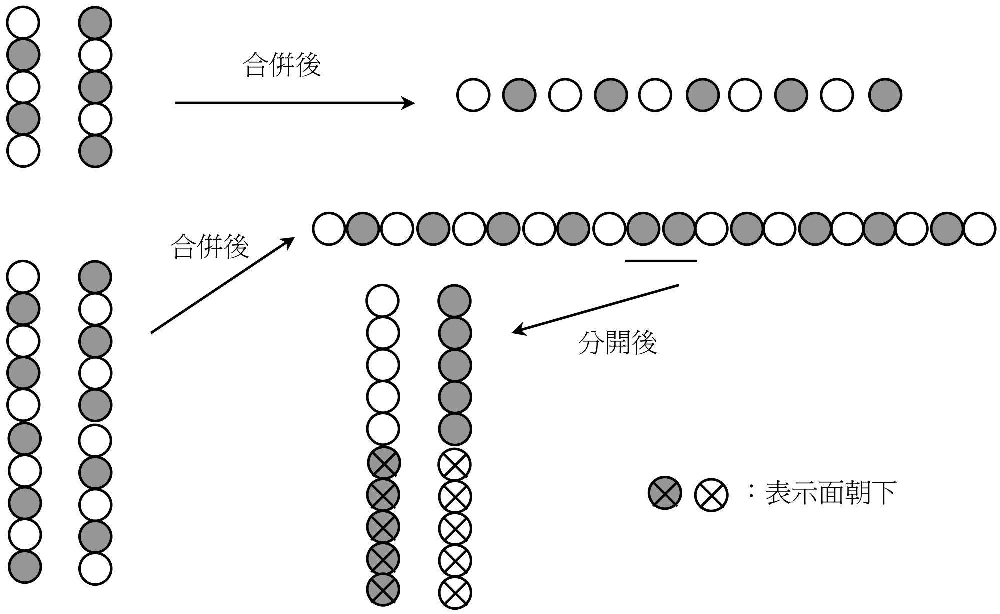
對列向量 **a** (1, 2, 3, 4, 5, 6)而言，您能不能找出外洗與內洗所對應的 *n* 值呢？
（提示：$\mathbf{X}_1^4=\mathbf{I}$，$\mathbf{Y}_1^3=\mathbf{I}$）

三、與數學有關的紙牌魔術

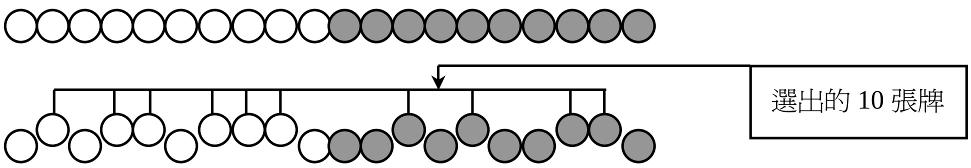
A. 將一疊 10 張紅心的牌和一疊 10 張黑桃的牌面朝上併排放置，紅心放在左邊，黑桃放在右邊。做以下的操作，同時用左手拿一張紅心，右手拿一張黑桃，不得翻面地各自放在這二疊牌的前面。接著再各拿一張牌，但放置時左、右手交錯，即將紅心放到右手邊，黑桃放到左手邊，然後的操作又是左、右手不交錯，左、右手交錯，…… 繼續上述的動作共 5 次。此時在左邊有 5 張面朝上的紅心牌，及紅黑交錯的 5 張牌；在右邊有 5 張面朝上的黑桃牌，及紅黑交錯的 5 張牌。將這些交錯的牌合併在一起，然後左邊一張、右邊一張發牌，結果所有 10 張紅心牌都回到左邊，10 張黑桃牌都回到右邊。

再重複以上的動作，把 20 張牌分成二疊紅、黑交錯的牌，將它們合併。然後把牌翻面，左一張、右一張的發牌，將頭 10 張牌翻面後放在桌上，它應該是紅心在左邊，黑桃在右邊。接下來的 10 張發牌時不翻面。

把在紅心下的 5 張牌與在黑桃下的 5 張牌對調，您猜是否每疊牌各有 5 張紅心、5 張黑桃？

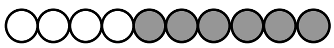


B. 任取十張紅心牌與十張黑桃牌，將它們合併在一起置於桌面上，何者在上，何者在下無關。將它面朝下展開成扇形，請觀眾任意選其中的十張牌，並將所選的牌稍稍移向前，用右手將被選中的牌由右至左仍保持面朝下，逐一抽出放到左手 (A)，然後合成一疊。同時也將留在桌上的牌依序合成一疊 (B)。奇妙的事情發生了，由上而下從這二疊牌中每次各翻開一張，竟然這二張牌的花色全都是一張黑桃、一張紅心。



分開看

上 

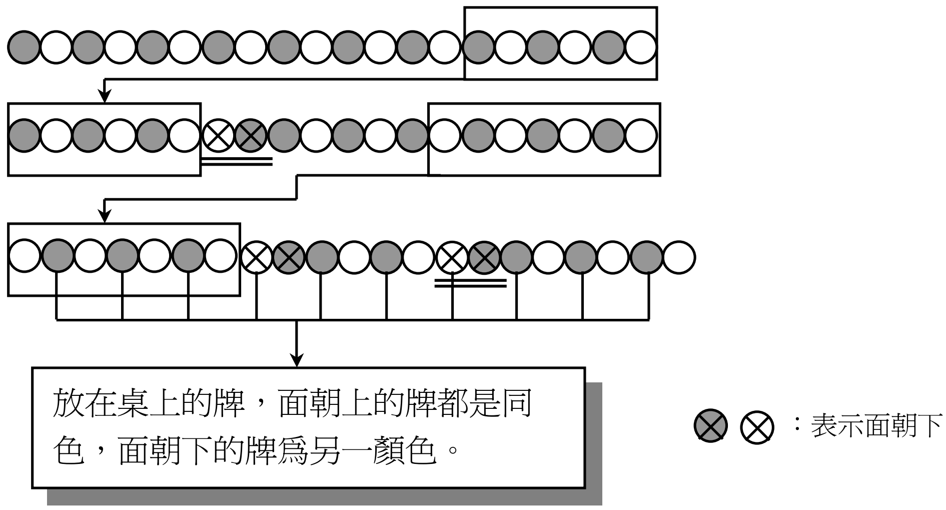
下 

將放在上面的牌反序

C. 若 20 張牌由上而下依黑紅，黑紅，⋯ 排列，並要求觀眾依下列方式洗牌：將首二張牌一起翻面放回原位，然後切牌。觀眾可以重複上述洗牌任意次。然後要求觀眾將這疊牌的第一張放到這疊牌的最底下，把第二張放到桌上，接下來的一張放到最底下，再放下一張到桌上⋯⋯ 直到桌面上共有 10 張牌爲止（注意：最後這些過程不可以把牌翻面）。

結果可發現在桌面上的牌，面朝上的牌都是同色，面朝下的牌爲另一顏色。

D. 剩下的 10 張牌，要求再分成二疊，然後可將牌內洗或外洗任意多次，戲完後再翻過面來，再洗牌任意多次，切牌，然後依照將第一張放到最底下，第二張放到桌上，第三張牌放到最底下，⋯⋯ 的規則操作，直到 10 張牌都在桌上。您可以發現正面的牌都是同色，反面的牌爲另一顏色。



四、撲克（梭哈）

撲克也是一種使用 52 張紙牌進行的紙牌遊戲，每一位玩家手上持 5 張牌。所以從 52 張牌取 5 張牌的可能組合數爲

$$N=\binom{52}{5}=\frac{52\times 51\times 50\times 49\times 48}{5\times 4\times 3\times 2\times 1}=2{,}598{,}960 \text{ 種}$$

其中，$\binom{n}{m}=\dfrac{n!}{(n-m)!\ m!}$，意思是從 n 張牌中任取 m 張的組合數。

拿到一個同花大順是指手邊的五張牌具有相同花色，而且點數分別爲 Ace, King, Queen, Jack 及 10 點；一個同花順是指手邊的五張牌具有相同花色，而且爲五張點數連續的紙牌（但不是同花大順），這裡 Ace 牌可以看成最大一張牌或最小點數。一個福祿是指這五張牌中有三張同點數，另外二張也是同點數的一對牌；一個同花是指這五張牌都具有相同花色（但不是同花大順或同花順）；一個順子是指這五張牌爲五張點數連續的牌（但不是同花大順或同花順），這裡 Ace 牌可以看成最大的一張牌或最小的點數。

下表列出某些牌色出現的機率：

牌　色	次　數	比　率	機　率	勝 負 比
同花大順 (royal flush)	4	$\frac{4}{2{,}598{,}960}$	1.54×10^{-6}	649,739.0:1
同花順 (straight flush)	$4\cdot 9-4$	$\frac{32}{2{,}598{,}960}$	1.23×10^{-5}	81,216.5:1
鐵　枝 (four of a kind)	$13\cdot 48$	$\frac{624}{2{,}598{,}960}$	2.40×10^{-4}	4,164.0:1
福　祿 (full house)	$13\binom{4}{3}12\binom{4}{2}$	$\frac{3{,}744}{2{,}598{,}960}$	1.44×10^{-3}	693.2:1
同　花 (flush)	$4\binom{13}{5}-36-4$	$\frac{5{,}108}{2{,}598{,}960}$	1.97×10^{-3}	507.8:1
順　子 (straight)	$9(4^5)-36-4$	$\frac{9{,}176}{2{,}598{,}960}$	3.53×10^{-3}	282.2:1
三　條 (three of a kind)	$13\binom{4}{3}\frac{(48)(44)}{2!}$	$\frac{54{,}912}{2{,}598{,}960}$	0.0211	46.3:1

二　對 (two pair)	$\frac{13\binom{4}{2}12\binom{4}{2}}{2!}44$	$\frac{123,552}{2,598,960}$	0.0475	20.0:1
一　對 (one pair)	$13\binom{4}{2}\frac{(48)(44)(40)}{3!}$	$\frac{1,098,240}{2,598,960}$	0.423	1.366:1

計算方式：

(a) 福祿的形式為 XXXYY，X 的點數可以為 A, 2, 3,⋯, Q, K，有 13 種取法。同點數有 4 張牌，取 3 張為$\binom{4}{3}$。Y 的點數可以為 A, 2, 3,⋯, Q, K 中與 X 不同的點，故有 12 種取法。同點數有 4 張牌，取 2 張為$\binom{4}{2}$。因此取福祿的組合數為$13\binom{4}{3}12\binom{4}{2}=3744.$

(b) 一對的形式為 XXYZW，X ≠ Y ≠ Z ≠ W。X 的點數可以為 A, 2, 3,⋯, Q, K，有 13 種取法。同點數有 4 張牌，取 2 張為$\binom{4}{2}$。Y 的點數可以為 A, 2, 3,⋯, Q, K 中與 X 不同的點，故有 12 種取法。同點數有 4 張牌，取 1 張為$\binom{4}{1}$，Y 共有$12\times4=48$種取法。Z 的點數可以為 A, 2, 3,⋯, Q, K 中與 X、Y 不同的點，故有 11 種取法。同點數有 4 張牌，取 1 張為$\binom{4}{1}$，Z 共有$11\times4=44$種取法。W 的點數可以為 A, 2, 3,⋯, Q, K 中與 X、Y、Z 不同的點，故有 10 種取法。同點數有 4 張牌，取 1 張為$\binom{4}{1}$，W 共有$10\times4=40$種取法。但是 X、Y、Z 與取出之順序排列無關，應除以 3!，因此取一對的組合數為$13\binom{4}{2}\frac{(48)(44)(40)}{3!}.$

五、橋牌

橋牌是一種使用 52 張紙牌進行的紙牌遊戲，每一位玩家手上持 13 張牌。從 52 張牌取 13 張牌的可能組合數為

$$\binom{52}{13}=635,013,559,600\ \text{種}$$

然而，手邊所持 13 張牌為同一花色的情形只有同為紅心，黑桃，方塊或同為梅花這四種，所以拿到這種牌色的機率只有

$$\frac{4}{\binom{52}{13}}=\frac{1}{158,753,389,900}$$

我們對於一些特殊的牌色，給一些特殊名稱。10、Jack、Queen、King 或 Ace 牌稱為大牌，手邊拿到的 13 張牌為三種花色的 Ace, King, Queen 及第四種花色的 Jack, Queen, King 及 Ace 稱為十三大頭；拿到的 13 張牌都為同花色的牌稱為十三張同花；拿到的 12 張牌都為同花色的牌（包含此花色的 Ace 牌）及第十三張不是 Ace 的其它花色的牌稱為 Ace 帶頭十二張同花；手邊拿到的 13 張牌沒有任何一張大牌稱為全無大牌。

下表列出某些牌色出現的機率：

牌　色	理　想　率	近似值	勝 負 比
十三大頭 (13 top honors)	$\frac{4}{N}=\frac{1}{158{,}753{,}389{,}900}$	6.30×10^{-12}	158,753,389,899:1
十三張同花 (13-card suit)	$\frac{4}{N}=\frac{1}{158{,}753{,}389{,}900}$	6.30×10^{-12}	158,753,389,899:1
A 帶頭十二張同花 (12-card suit, ace high)	$\frac{4\cdot12\cdot36}{N}=\frac{4}{1{,}469{,}938{,}795}$	2.72×10^{-9}	367,484,697.8:1
全無大牌 (Yarborough)	$\frac{\binom{32}{13}}{N}=\frac{5{,}394}{9{,}860{,}459}$	5.47×10^{-4}	1,827.0:1
四張 Ace (four aces)	$\frac{\binom{48}{9}}{N}=\frac{11}{4{,}165}$	2.64×10^{-3}	377.6:1
九張大牌 (nine honors)	$\frac{\binom{20}{9}\binom{32}{4}}{N}=\frac{888{,}212}{93{,}384{,}347}$	9.51×10^{-3}	104.1:1

計算方式：

(a) A 帶頭十二張同花的形式為 A + {2, 3, 4,⋯, J, Q, K}中的任意 11 張牌 + X，X 為任意不同花色且不為 A 的牌。從{2, 3, 4,⋯, J, Q, K}中取任意 11 張牌，即從中取 1 張不要，有 12 種方法，又其花色可以從 4 種花色中取 1 種，有 4 種選法。X 可以從剩下不同花色的 39 張牌中除去 3 張 Ace 的 36 張牌中選 1 張，共有 36 種方法，所以 A 帶頭十二張同花有 $4\cdot12\cdot36$ 種組合。

(b) 九張大牌的形式為 9 張大牌 + 4 張非大牌，而大牌共有 20 張，從中選取 9 張有 $\binom{20}{9}$ 種方法，剩下的 4 張牌可從不是大牌的 32 張中任選，有 $\binom{32}{4}$ 種方法。故九張大牌有 $\binom{20}{9}\binom{32}{4}$ 種組合。

六、同花順與異花順

若一疊紙牌有三種花色，每種花色各有三種號碼（1、2、3），則這疊牌共有九張牌。規定手上的牌中若有三張牌有下列之一種情形：

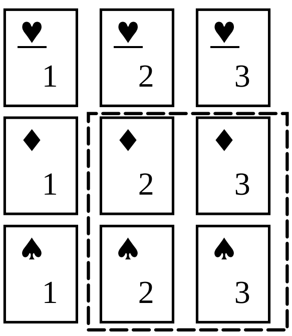
(a) 同花色，但號碼全不同；

(b) 同號碼，但花色全不同；

(c) 花色全不同且號碼也全不同；

則可得分。試問最少要抽幾張牌才能保證可得分？

例如：



選擇虛線框內這 4 張牌還不能得分，必須再從虛線框外選 1 張才能得分（不管選那一張都一定得分），所以至少要選 5 張牌才能保證得分。

習　題

1. 將 52 張牌編號 1～52 號，正面朝上，然後將編號為 2 的倍數的牌翻面，之後再將編號為 3 的倍數的牌翻面，再將編號為 4 的倍數的牌翻面，…… 直到將編號為 52 的倍數的牌翻面為止。請問最後有那些牌正面著朝上？
2. 將一副有 52 張牌的樸克牌由上而下依序取牌分發成為四疊：第一疊一張，第二疊一張，第三疊一張，第四疊一張；第一疊一張，第二疊一張，……直到發完為止。然後把這四疊牌合在一起，第一疊的牌放最下面，第二疊放在第一疊上面，第三疊再放在它們的上面，第四疊放在最上面。接著把整疊紙牌翻轉過來，重複進行以上的操作（注意：分發牌的時候，不可以把紙牌翻面）。請問至少需要進行以上的操作多少次才能使整副牌恢復原來的次序？
3. 將 13 張黑桃牌由 Ace (A) 依序排到 King (K)，在每一張黑桃牌上面逐一放置一張紅心的牌，使得每組兩張牌的點數和是完全平方數。這裡 Ace 為點數 1，Jack 為點數 11，Queen 為點數 12，King 為點數 13。請證明這種安排只有唯一的一個解。
4. 承上題，證明若改為點數 1～14 的牌，則有二個解。
5. 用 4 種花色 A、K、Q、J 各一張，排成一個4×4的拉丁方陣。
6. 一副牌 52 張，第 9 張牌經過外洗 5 次後，位置在第幾張？內洗 10 次後，第 1 張牌是原來的第幾張牌？

研究問題

1. 將點數 1～9 的牌各 3 張排成一列，使得相鄰兩張點數 1 的牌中間只有 1 張牌；相鄰兩張點數 2 的牌中間只有 2 張牌；相鄰兩張點數 3 的牌中間只有 3 張牌；…… 相鄰兩張點數 9 的牌中間只有 9 張牌。例如：181915267285296475384639743。試找出所有可能的排法。
2. 承上題，若改為點數 1～10 的牌各 3 張排成一列，結果為何？
3. 有 n 張黑桃由 1～n 依序排列，在每一張黑桃牌上面逐一放置一張紅心的牌，使得每組兩張牌的點數和是完全立方數。例如：

$$\begin{array}{cccccccc} \spadesuit & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \heartsuit & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ \hline & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \end{array}$$

   試求出在$n\le 50$時，有那些 n 可以符合以上的配對？

4. 若一疊紙牌有三種花色，每種花色有三種號碼（1、2、3），且每種號碼又有紅、藍、綠三種顏色，每一種顏色又有三種不同的花邊。規定手上的牌中若有三張牌有下列之一種情形：
   (a) 花色、號碼、顏色、花邊有 n 種相同，有$4-n$種不同，$1\le n<4$；
   (b) 花邊全不同、顏色全不同、花色全不同且號碼也全不同；
   則可得分。試問最少要抽幾張牌才能保證可得分？
5. 試證明：當$n\ge 4$，$n-1$為質數時，n 張牌經過$n-2$次外洗後，可以恢復到原來的順序。