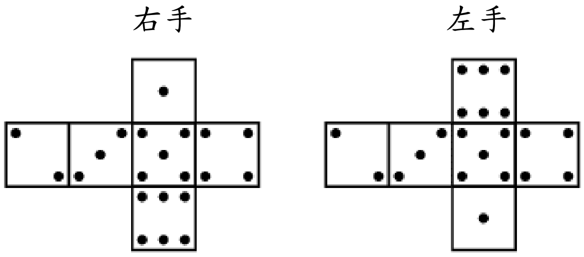
骰子漫談

孫文先

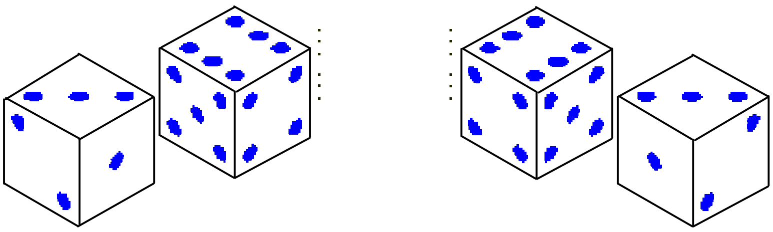
一個骰子的幾何外貌是一個在它的每一個表面上標示點數所構成的立體，它的每一個面都具有相同形狀、大小，通常以柏拉圖立體及阿基米德對偶立體最常被拿來使用。骰子可以藉由擲向空中來滾動它，並以其某一面穩固地著地。它被廣範地使用於各種遊戲中，諸如取點數比大小，或藉助所得點數來移動遊戲板上的棋子等等。一枚銅幣可以視為一個退化成二個面的骰子。

一般常見的骰子是六個面的正立方體，它的每一面所標示的點數分別為 1, 2, 3, 4, 5 及 6 個點，每一面的點數都不同。每次擲骰子所得的點數是採用正立方體頂面上所標示的點數。

對骰子而言，點數安排的位置也有一定的規則可循，以六面體骰子而言，相對的二個面上的點數和都是 7。如右圖所示，這裡給出點數 1, 2 及 3 對稜角作順時針及逆時針方向排列的二種可能的鏡像排列。



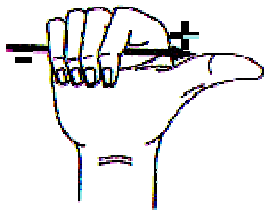
在網頁 users.erols.com/ee/dice.htm 有關座標系的文章中，定義了「右手骰子」及「左手骰子」。如下圖示， LH 表示左手骰子，RH 表示右手骰子，000 表示傳統骰子的標示方向。



LH : 000 : RH

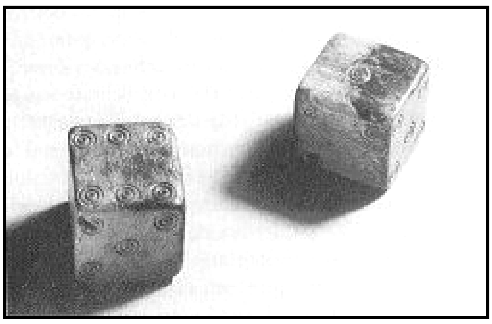
定義：**右手座標系**

如果一個沿指定座標軸的旋轉動作會造成一個朝向座標軸正向運動的右手螺旋，則稱這個旋轉動作是正的或右手，如右圖示。



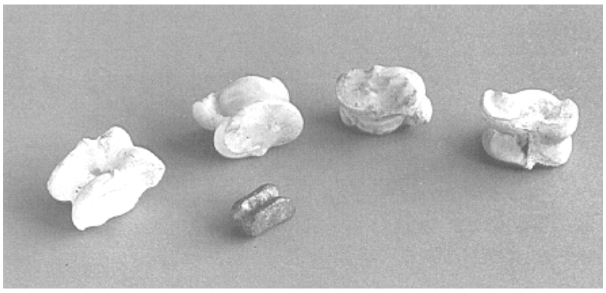
骰子的歷史

擲骰子在羅馬人之間是一種非常流行的遊戲。右圖是在 Herculaneum 城被發現的一對骰子。羅馬人稱它為 Tesserae。此外，在羅馬還有另一種只有四個面標有點數圖示的骰子，他們稱這種骰子叫 Tali。



羅馬人所使用的骰子和今日常見的標準骰子，兩者之間的差異只有在後者的點數安排上，要求對稱面的點數和為 7。

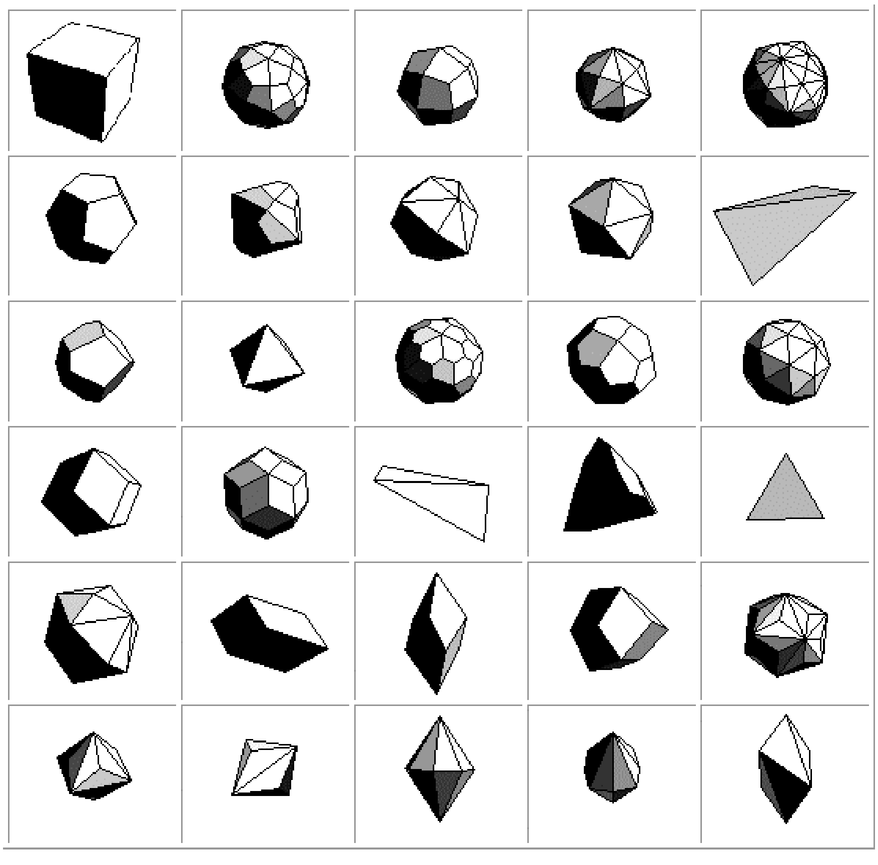
骰子的玩法也和今日無異，將骰子置於杯中搖動後擲出，讀出點數。除了 Duodecim Scripta 以外，希臘人使用三個骰子玩遊戲，羅馬人則只用兩個。



Tali，是在今日普遍為人所知的一種擲蹠骨遊戲，或許也是在羅馬人之間最普遍的一種遊戲。它類似骰子遊戲，但是它所使用的是一組標示圖案的獸骨，羅馬人稱它為 Tali（如右圖所示）。它源自古希臘，以距骨或山羊、綿羊的蹠骨所製成的。在每個 Tali 的四個面上刻示有一些圖案，也許有些是刻著羅馬的數字，這四個面所刻示的數值都不相同，有些 Tali 是刻著 1, 3, 4 及 6。使用 Tali 來進行遊戲的方式多半是將四個 Tail 從一般高度的位置上拋擲出來，使這些 Tali 著落於一個遊戲板上或地板上。

在西元前 350 年左右，在希臘與羅馬兩地的人仍然是延用蹠骨所製成的 Tali 來進行他們的遊戲，但是，此時當地愈來愈多的人也開始改為使用骰子了。

除了常見的六面體骰子之外，Diaconis 及 Keller 更證明了存在著不同於以柏拉圖立體與對偶的阿基米德立體所產生的公平骰子。這裡列出 30 種等多面體。它們具有類似、相同對稱面。



皇冠與錨

在美國，加拿大及歐洲大多數的城市是禁賭的，但是遇到囍慶日子，如展覽會等場合中，必有一些合法的賭博遊戲供人們娛樂。最普遍的一種就是「皇冠與錨」。

遊戲的玩法是莊家在一塊長板上畫分六格，在這六格中分別刻上六種不同的圖案，它們是：紅桃、梅花、黑桃、方塊、皇冠、錨。其順序如下：

紅桃	梅花	黑桃	方塊	皇冠	錨

投注者將硬幣或鈔票放在所喜歡的一格上，然後由一人拋擲三顆骰子，每一骰子有六面，這六面分別刻上上述六種圖案。倘若所擲出的骰子三顆都是紅桃，而有人亦投注在紅桃上的話，他便可取回自己的投注金並獲得三倍賠金。若在擲出的骰子中有二顆是紅桃，則除了取回自己的投注金外，另可獲得二倍賠金。若擲出的骰子只有一顆是紅桃，則除了取回自己的投注金外，另可獲得一倍賠金。假若沒有紅桃出現，則他的投注金便輸掉了。

這個遊戲與台灣農曆新年時在街頭巷尾常見的「押寶」遊戲完全相同。表面上，這規則頗為合理，但是，以機率的觀點來分析，便可知何方較有利。為了計算方便，我們稱骰子擲出後出現三個相同的圖案為「三骰」，有兩個相同者為「二骰」，三個都不同者為「單骰」。

假設每一個圖案都有 1 單位的投注金，則莊家在每次投擲收益情形為：

「三骰」：賠 3 個單位的投注金給一份，收回另外五份，實得 2 單位利潤。

「二骰」：賠 2 個單位的投注金給一份及 1 個單位的投注金給另一份，收回其餘四份，實得 1 單位利潤。

「單骰」：分別賠 1 個單位的投注金給三份，收回其餘三份，則無利潤也無損失。

現在計算出「單骰」、「二骰」、「三骰」的機率值。

擲出三顆骰子，一共有 216 種可能性。其中出現三骰的可能性只有 6 種。出現二骰的可能性共有 90 種（對紅桃而言，出現二骰的排法有 $5+5+5=15$ 種，但是，除了紅桃以外，其他五種圖案有可以用相同方法排出，所以「二骰」的總數為 90 種。）。出現單骰的可能性就是 $216-6-90=120$ 種。

因此，莊家在 216 次機會中所中的 6 次三骰可獲得 12 單位利潤，在二骰中可獲得 90 單位利潤，總共為 102 單位利潤，將這利潤和總投注金 $216\times6=11296$ 二者相比便是利益比 7.9％。這就是說，每一次投擲的結果，莊家可期望 7.9％的利潤。從上面的分析來看，就可以很清楚得知在遊戲中何者較有利了！

拋擲一個六面體骰子，所出現點數 1, 2, 3, 4, 5 及 6 的機率都是 1/6。

拋擲二個六面體骰子，出現點數 2 的機率為 1/36；出現點數 3 的機率為 2/36；出現點數 4 的機率為 3/36；出現點數 5 的機率為 4/36；出現點數 6 的機率為 5/36；出現點數 7 的機率為 6/36；出現點數 8 的機率為 5/36；出現點數 9 的機率為 4/36；出現點數 10 的機率為 3/36；出現點數 11 的機率為 2/36；出現點數 12 的機率為 1/36。

拋擲三個六面體骰子，出現點數 3 的機率為 1/216；出現點數 4 的機率為 3/216；出現點數 5 的機率為 6/216；出現點數 6 的機率為 10/216；出現點數 7 的機率為 15/216；出現點數 8 的機率為 21/216；出現點數 9 的機率為 25/216；出現點數 10 的機率為 27/216；出現點數 11 的機率為 27/216；出現點數 12 的機率為 25/216；出現點數 13 的機率為 21/216；出現點數 14 的機率為 15/216；出現點數 15 的機率為 10/216；出現點數 16 的機率為 6/216；出現點數 17 的機率為 3/216；出現點數 18 的機率為 1/216。

我們以函數 $P(p,n,6)$ 來表示擲 n 顆六面體骰子所出現點數 p 的機率，則當 $n=2$ 時，

$$
\begin{aligned}
P(p,2,6) &= \frac{1}{36}\begin{cases} p-1, & 2\le p\le 7 \\ 13-p, & 8\le p\le 12 \end{cases} \\
&= \frac{6-|p-7|}{36} \qquad 2\le p\le 12.
\end{aligned}
$$

所以最常擲到的點數為 7，機率為 6/36 = 1/6。最不易擲到的點數為 2 與 12，機率是 1/36。

當 $n=3$ 時，

$$
P(p,3,6)=\frac{1}{216}\begin{cases} \frac{1}{2}(p-1)(p-2) & 3\le p\le 8 \\ -p^2+21p-83 & 9\le p\le 14 \\ \frac{1}{2}(19-p)(20-p) & 15\le p\le 18. \end{cases}
$$

所以最常擲到的點數為 10 與 11，機率為 1/8。最不易擲到的點數為 3 與 18，機率是 1/216。

同樣可得到在拋擲 4 顆骰子時，最常擲到的點數為 14，機率為 73/648。最不易擲到的點數為 4 與 24，機率是 1/1296。

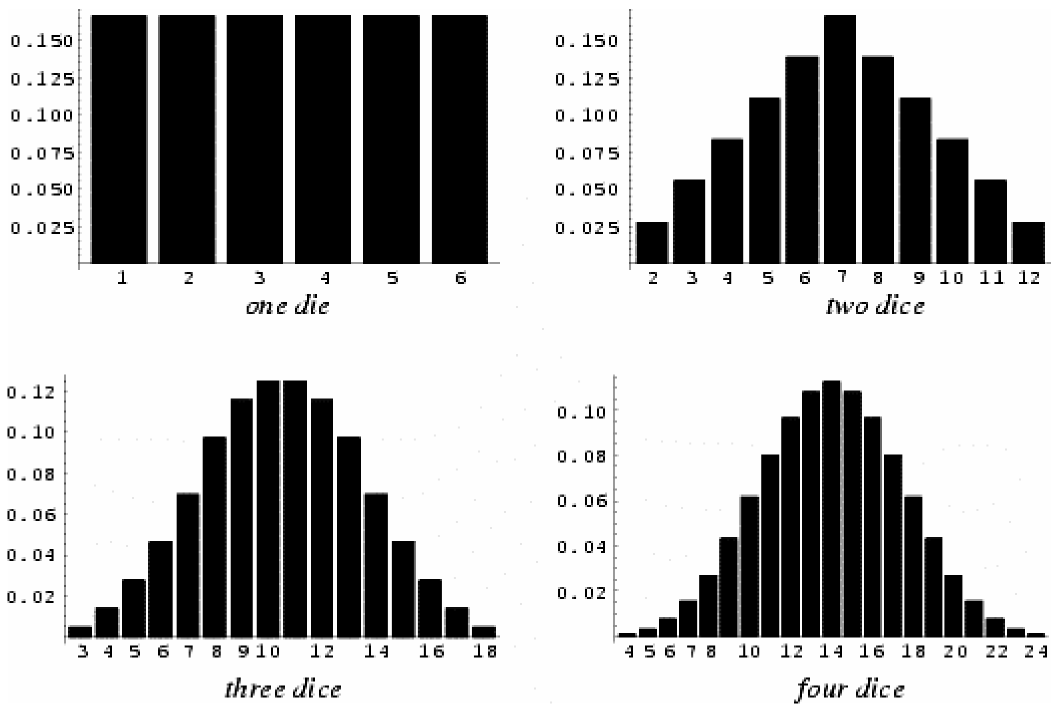
一般來說，令函數 $PL(n,s)$ 表示擲 n 顆 s 面體骰子時，最可能出現的點數值，則當 $s=6$ 時，

$$
PL(n,6)=\left\lfloor \frac{7}{2}n \right\rfloor = \begin{cases} \frac{7}{2}n & \text{當}n\text{是偶數} \\ \frac{1}{2}(7n-1) & \text{當}n\text{是奇數,} \end{cases}
$$

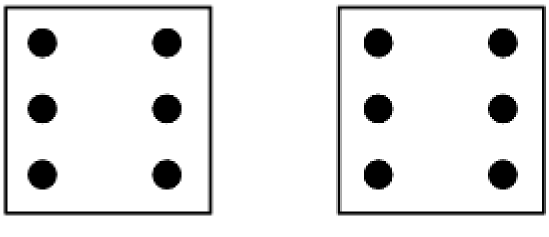
或 7, 10, 14, 17, 21, 24, 28, 31, 35, …，當 $n = 2, 3, \dots$。

當 $n = 2, 3, \dots$時，n 個六面體骰子最可能出現的點數之機率為 1/6, 1/8, 73/648, 65/648, 361/3888, 24017/279936, 7553/93312, ... 。

下面為擲 1 個，2 個，3 個及 4 個六面體骰子時，所出現的機率—點數圖表。可以發現當所使用的骰子數愈多時，即 n 值愈大，此拋擲骰子的試驗所得結果趨向一常態分布的型式。



“Boxcars”



當我們擲兩個六面體骰子時，在一次拋擲中得到兩個點數都是 6 的機率是 1/36，或 2.777…%。我們稱得到兩個點數都是 6 為發生一次“Boxcars”。

為了使 n 次拋擲一對骰子中至少發生一次 Boxcars 的機率等於 50 %，下面等式必須成立。

$$1-\left(\frac{35}{36}\right)^{n}=\frac{1}{2},$$

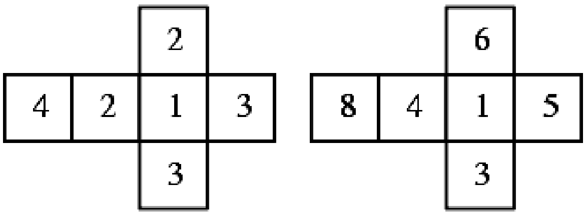
事實上，在 $n = 25$ 時，所得機率為

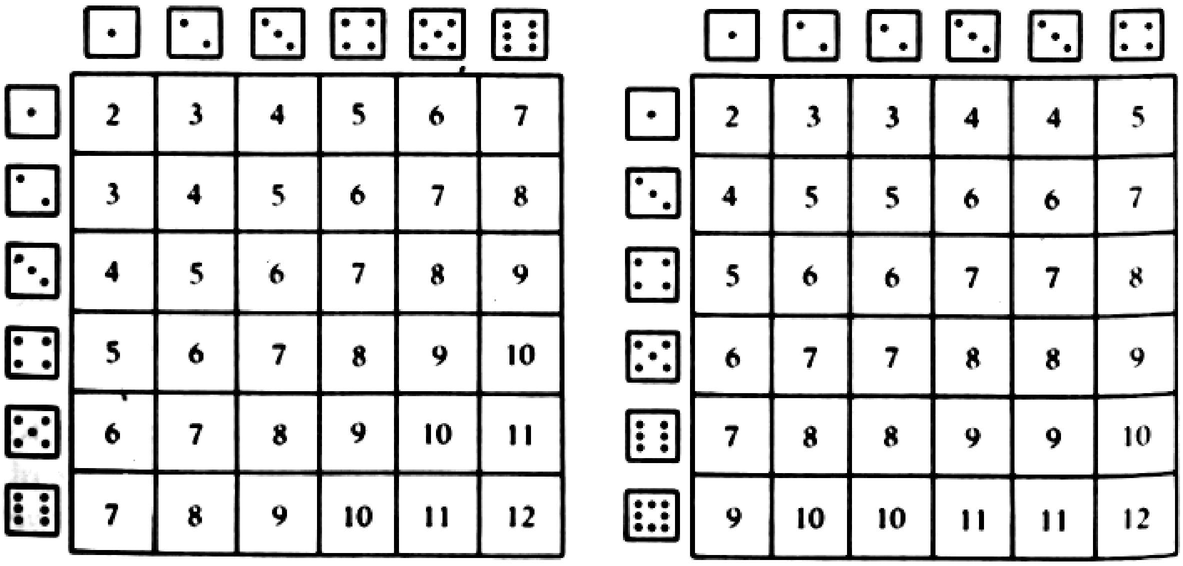
$$1-\left(\frac{35}{36}\right)^{25} \approx 0.505532$$

“Sicherman Dice”

取一顆正常的骰子，由於它的點數配置恰好為 1～6，都不相同，所以，每個點數出現的機率都一樣。但是由前可知，取一對正常的骰子，或更多的骰子，此時出現的每一種不同的點數的機率卻不盡相同。這使我們聯想到：是否可能設計出一對骰子，不限制它的點數安排，使它出現的每一種不同的點數的機率都相同，或者它可以取代原先標準的骰子，出現的每一種不同的點數的機率都與一對正常的骰子相同呢？

“Sicherman 骰子”就是一對點數配置與正常骰子不同的骰子，它所拋擲出的每一種不同的點數(2, 3, 4, …, 12)的機率恰好與一對正常的骰子相同。(見下面圖表）這是 Col. George Sicherman 給出的解答，左手邊的骰子，它的每一對對稱面之和都是 5，右手邊的骰子，它的每一對對稱面之和都是 9。



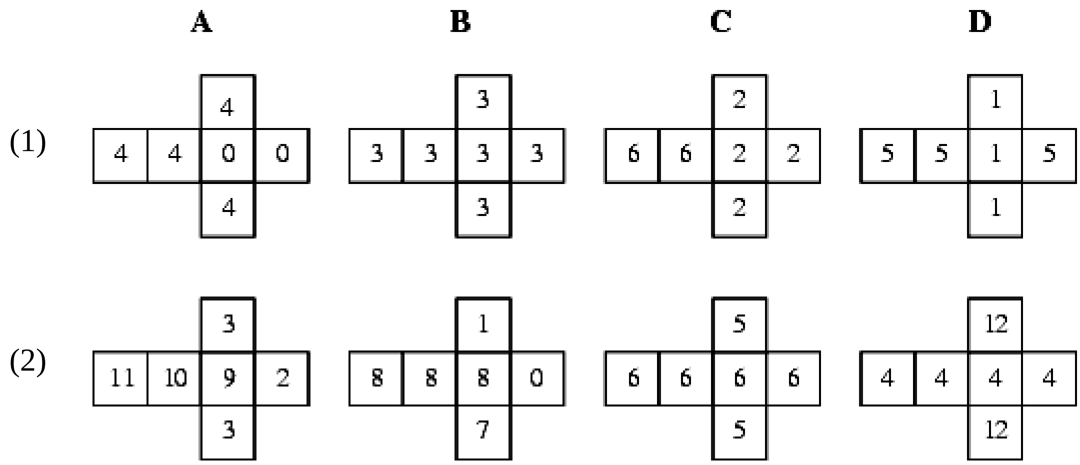


事實上，Sicherman 更指出：在不使用 Sicherman 骰子的情形下，不可能找到一組大於或等於三顆的骰子，它所拋擲出的每一種不同的點數的機率恰好與一組同數量的正常骰子相同。

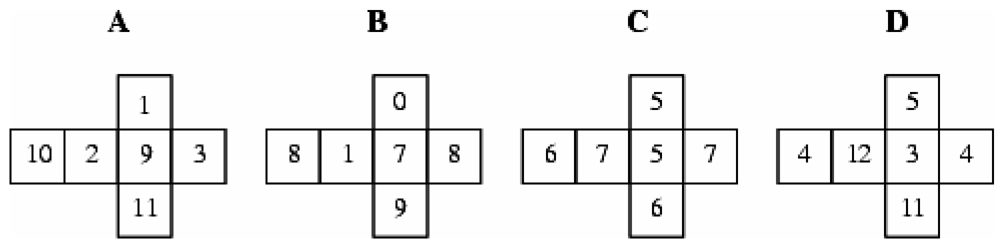
若取一顆正常的骰子及一組 Sicherman 骰子，則這三顆骰子所拋擲出的每一種不同的點數的機率恰好會與三顆正常的骰子相同；取用二組 Sicherman 骰子恰

好會與四顆正常的骰子相同。

“Efron’s Dice”



對上圖的每一組骰子而言，骰子 A 擲出的點數勝於骰子 B，骰子 B 擲出的點數勝於骰子 C，骰子 C 擲出的點數勝於骰子 D，骰子 D 擲出的點數勝於骰子 A，機率都是 2 : 1。但是，在骰子 A, B, C 及 D 之間並無遞移性存在，也就是說，骰子 B 不見得勝於骰子 D，骰子 A 不見得勝於骰子 C。我們稱具有此種性質的骰子為“Efron 骰子”。下面這組 Efron 骰子，機率都是 11 : 6。



下面這幾組骰子之間也都有“無遞移性”存在。第一組三個骰子機率都是 5 : 4. (A : 3, 3, 5, 5, 7, 7; B : 2, 2, 4, 4, 9, 9 及 C : 1, 1, 6, 6, 8, 8)；第二組三個骰子機率都是 7 : 5. (A : 1, 1, 1, 13, 13, 13; B : 0, 3, 3, 12, 12, 12 及 C : 2, 2, 2, 11, 11, 14)；第三組三個骰子機率比為：A : B = 25 : 11, B : C = 7 : 5, C : A = 7 : 5. (A : 1, 4, 4, 4, 4, 4; B : 3, 3, 3, 3, 3, 6 及 C : 2, 2, 2, 5, 5, 5)。

習題：

(1). 對兩個公平的骰子，令事件 E 表示“點數和為 4”，事件 F 表示“骰子出現相同的偶數點”。請問至少其中一個事件發生的機率為何？兩個事件同時發生的機率為何？事件 E 與事件 *F* 都不發生的機率又是多少？

(2). 對兩個公平的骰子（紅色骰子與藍色骰子），令事件 E 表示“至少有一個是點數 6”。請問 P(E) = ?

(3). 擲兩個公平骰子，請問第一個骰子不出現點數 6 或第二個骰子不出現點數 6 的機率為何？

“條件機率”：

計算“條件機率”是

(a). 找出發生兩事件之所有可能。

(b). 找出發生此條件之所有可能。

計算“條件機率”是取兩事件發生機率之比值，因此

$$P(E\,|\,C) = \frac{P(E \cap C)}{P(C)} \quad \text{或}$$

$$P(E \cap C) = P(E\,|\,C)P(C)$$

(4). 擲兩個公平骰子，一個是紅色，另一個是綠色的。請問：在出現的點數和是 6 時，紅色骰子的點數是 1 或 2 的機率為何？

(5). 在電視遊戲節目中，已知只有一扇門後藏有一面獎牌，最後的贏家可以從三扇門中選取一扇門。若主持人知道哪一扇門後面有獎牌，在最後的贏家選取其中一扇門後，主持人打開剩餘二扇門之中的一扇，在門後並無獎牌。請問：是否應堅持原先的選擇，或是改變先前的決定，換到另一扇未開啟的門，或是隨意從剩下這兩扇門中選取一個？

研究問題：

(1). 取上述 Efron 骰子，當四顆骰子一起擲時，選何者最有利？

(2). 對上述 Efron 骰子，若一次要擲兩顆骰子，與剩下來的兩顆比較，那麼選那兩顆骰子最有利？與任意的兩顆比較呢？

(3). 如果您有一個有偏差的標準骰子（即由於骰子有製造上的瑕疵，使得出現點數 1, 2, 3, 4, 5 及 6 的機率有些微差異），如何利用它公平地得到隨機數 1, 2, 3, 4, 5, 6？

(4).除了 Sicherman 骰子，能不能找出與二個常見骰子等價且標記不同的骰子？

(5). 證明：在不使用 Sicherman 骰子的情形下，不能找出與三個或三個以上常見骰子等價的骰子組。

參考資料：

http://members.aol.com/dicetalk/history.htm
http://www.personal.psu.edu/users/w/x/wxk116/roma/rbgames.html
http://users.erols.com/ee/dice.htm
http://mathworld.wolfram.com/Dice.html
http://mathworld.wolfram.com/EfronsDice.html
http://mathworld.wolfram.com/SichermanDice.html
http://mathworld.wolfram.com/Isohedron.html
http://www.mathpuzzle.com/Fairdice.htm