生生不息的莫比烏斯帶
—拓 撲 學 奇 趣

一、　什麼是拓撲學

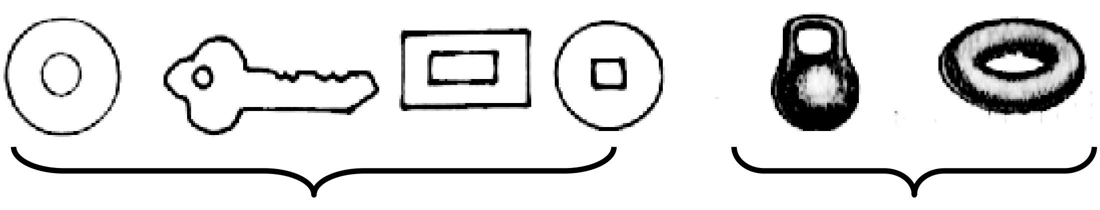
拓撲學（Topology）是在 19 世紀末興起並在 20 世紀中迅速蓬勃發展的一門數學分支，其中拓撲變換在許多領域均有其用途。直至今日，從拓撲學所衍生出來的知識已和近世代數、分析共同成爲數學理論的三大支柱。

拓撲學的最簡單觀念產生於對周圍世界的直接觀察。直觀的說，關於圖形的幾何性質探討，不限於它們的“度量”性質（長度、角度等等）方面的知識。拓撲學探討各種幾何形體的性質，但是其內容卻與幾何學的範疇不盡相同，多數的討論都是圍繞在那些與大小、位置、形狀無關的性質上。

例如，曲線（繩子、電線、分子鏈 …）不論有多長，它可以是閉合或不是閉合的。如果曲線是閉合的，則它可以是“纏繞”得很複雜的。兩條以上的閉曲線可以互相套起來，而且有很多型式。立體及它們的表面可以是有“孔洞”的，在不割裂、破壞孔洞下，它們允許做任意的伸縮及變形。這種變形不會減少或增加孔動數量，就叫做它的“拓撲性質”。一個橡皮圈，在它的彈性限度內，任憑我們把它拉長、扭轉，只要不把它弄斷，那麼它永遠是一個圈圈。拉長使它的長度改變了，扭轉使它的形狀改變了，然而在拓撲學上不會理會這些，只是專注在“它永遠有一個圈圈”上。

A. 拓撲同胚與等價性質

拓撲學只探討各種幾何形體的內稟特質。一個幾何圖形的性質，經由一拓撲變換作用後維持不變，該性質稱爲圖形的拓撲性質。下面兩組圖形從拓撲變換角度來看，它們分別是“等價”的。

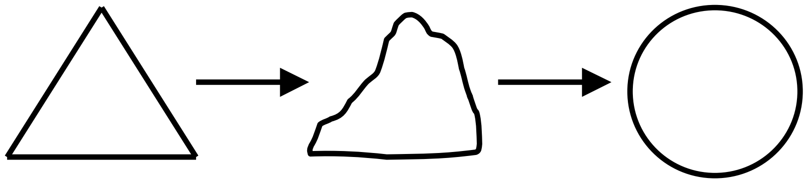


等價　　　　等價

任何三角形、方形、圓形及橢圓的內稟特質，從拓撲學的立場看來，它們都沒有任何區別。然而，在初等幾何學中，這些圖形的形狀、面積、周長等都是不相同的。

如果我們把一個橡皮製的物體 X 任意的扭轉、拉長，但不可把它撕開或弄斷，而得到另一形狀的物體 Y，我們稱這兩個物體 X 和 Y 在拓撲上是一種“同胚”或“等價”的結構。廣義的來說，在一個物體到另一個物體的對應關係，如果它是不間斷，又不重複，則在拓撲上稱這個關係在兩物體間建立一個“同胚”變換。兩個物體間如果存在有這種關係，則稱它們爲“拓撲同胚”。

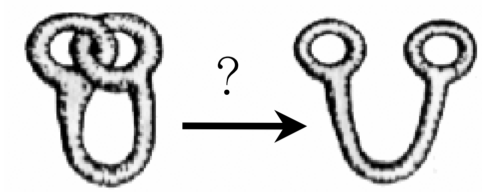
例如，任意一個三角形在任意延伸、伸縮的變形變換中，可以疊合住一個圓形。所以這個延伸、伸縮變換是一種同胚變換，因而三角形和圓形在拓撲上被視爲是同胚或等價的。



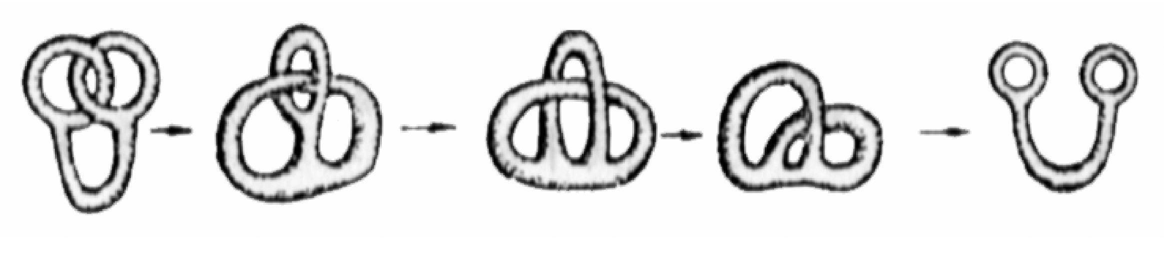
拓撲學就是探討同胚的拓撲空間所共有的性質之一門學科。網路、歐拉定理、曲面、向量場、四色問題、結、覆蓋等，都是拓撲學研究的重要課題。

B. 不可思議的拓撲變換

法國著名數學家龐加萊（Poincaré, 1854～1912）以他豐富的想像力及抽象的思維能力，提出下圖中的兩個物體是等價（同胚）的，也就是說，您可以從其中一個開始，經由拓撲變換得出另一個，您認爲可能嗎？



龐加萊的變換魔術：請注意下面的變換！在拓撲上，只要不破壞原有結構，任意伸縮變形是被允許的，因爲總能找到一個同胚的對應來描述這個動作。

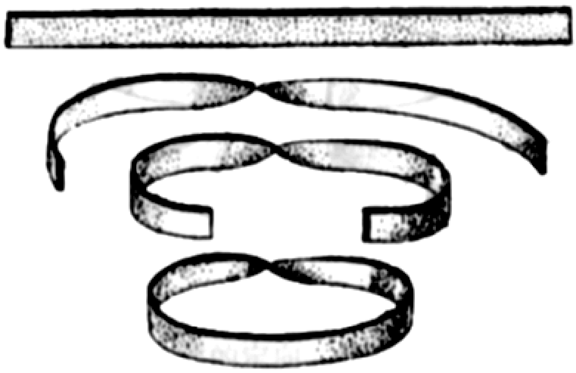


龐加萊的奇怪想法：

在車輪內胎上有一個小洞，能否在不撕壞車胎的前提下，通過小洞將車內胎翻面過來（裡面翻到外面）？如果可以，該如何操作？

二、 莫比烏斯（Möbius）帶

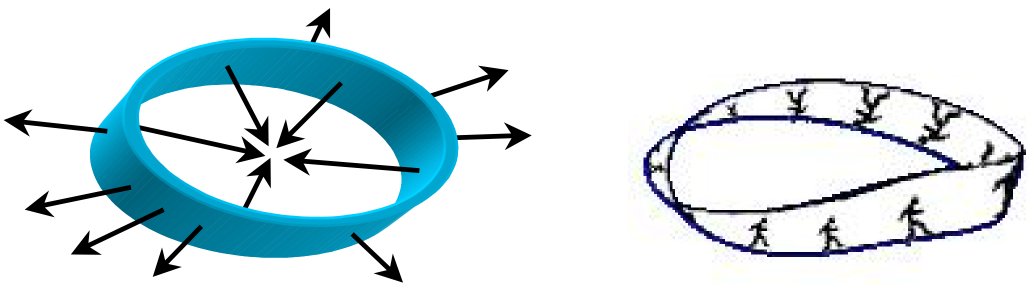
在 1862～1865 年，德國數學家莫比烏斯（Möbius）和利斯廷的著作中出現了一種有邊緣的曲面。它可以這樣得到：把長方形紙條扭轉一次，然後把兩端接起來。這樣得到的曲面叫做 Möbius 帶。



關於 Möbius 帶是怎樣發現的，有這樣一個故事：有一次，莫比烏斯在海濱度假。到了晚上，蒼蠅太多，使他難以入睡。於是他把黏蠅紙扭轉半圈，然後把兩端粘到一起，形成一個紙環。再把這樣的紙環掛在假期別墅的椽頭上。他臨時製作的捕捉蒼蠅的紙帶很管用，他睡覺沒有再受蒼蠅的干擾。早晨醒來，他的目光落在那個紙環上，驚訝地發現這條紙只有一個面，並且只有一條稜。著名的 Möbius 帶於是誕生。

A. 單側的曲面

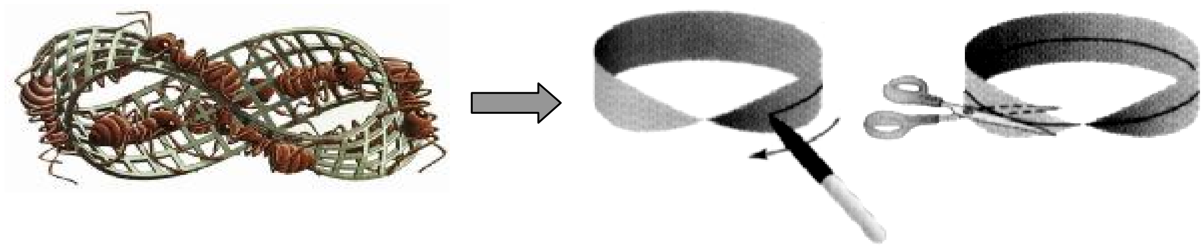
這個扭轉一次紙帶所得到的 Möbius 帶有何特別的幾何性質呢？我們看下面這個一般的紙環，在紙環內，垂直於紙面的一個法向量，總是由紙面指向圓形紙環的環心處，在紙環外，垂直於紙面的一個法向量，總是指向外面；但是對 Möbius 帶而言，就沒有這種情形。



對 Möbius 帶而言，它是一種單側的曲面。譬如說，在九章的標誌中，沿著帶子上移動的人，路途中會經過他移動的起始點，但是卻在另一側。如果他繼續移動，則會把整個 Möbius 帶都走遍。所以可以確定它沒有第二側！

B. 從 Möbius 帶中間剪一刀

取一隻筆，在製作好的 Möbius 帶上畫上下圖中昆蟲所走的軌跡，然後取一把剪刀，將 Möbius 帶沿軌跡剪開。您有什麼發現呢？



從上面操作中發現，剪一刀後的 Möbius 帶並不會被分成兩個紙環，而是形成一個更大的紙環。您知道爲什麼嗎？

如果我們將 Möbius 帶的紙面寬畫上三等份，沿兩條等分線剪開，及結果會如何？又剪三刀成爲四等份呢？

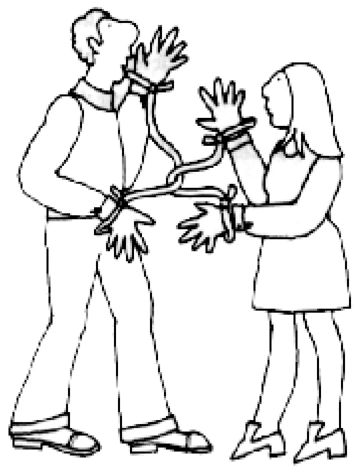
C. Möbius 帶與紙環的拓撲同胚結構

從一條紙帶扭轉一次接合後得到 Möbius 帶，經過剪刀剪一刀後，得到一個瘦長的紙環，它是一個紙帶扭轉三次接合後的圖形。可以發現它們都是單側的圖形。

從上述拓撲觀點來看，在它們之間存在一個變換，維持了它們都是單側的性質，稱它們是同胚的。想一想，一個未經扭轉的紙環和一個經由兩次扭轉所得的紙環，是否是同胚？

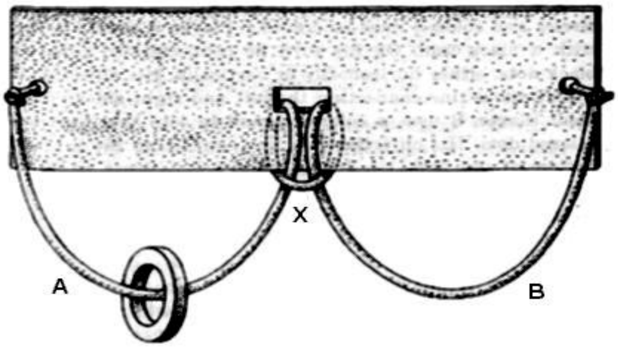
三、　雙人脫困遊戲

在下圖中，如果不解開手腕上的繩結，不破壞、剪斷繩子下，怎樣幫助他們脫困？將這一對男女分開呢？找一個周遭的同伴一起動手操作試試看！



四、 Puzzle !!!

在下圖中，最初在位置 A 的金屬環能否被移往位置 B 的地方呢？如果可以，該怎麼移動？用塊厚紙板鑽幾個洞，作個玩具試試。

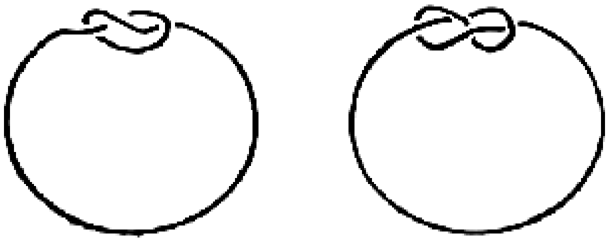


五、 繩圈

人類自從會使用繩子，就會打繩結，結繩圈。各種的繩結的功用可能都一樣，爲了穩固物體而做，但是打繩結的方法卻是千奇百怪。爲了研究它們在幾何形狀上本質的差異性，我們把繩的兩端黏合起來，成爲沒有端點的繩圈。這個想法就像上述討論 Möbius 帶一樣。對許許多多的繩圈而言，能不能經過一連串的連續變換，變成一種相同的繩圈呢？如果可以，那麼在拓撲觀點上這些繩圈也就沒有分別了。

下面是兩個繩結，做兩個實物模型把玩一番，您就會發現它們是不同的！

如果把繩的兩端黏合起來，成爲具有繩結又沒有端點的繩圈，那麼就更容易用數學來描述它們。如下圖所示，我們分別稱它們爲“右手三葉結”及“8 字形結”。



A. 什麼是紐結、鏈環

爲了在數學上更貼切的描述繩圈，我們定義什麼是“紐結”。簡單地說，

紐結就是三維空間中簡單的閉曲線，而簡單的閉曲線，意思是連通的（連成一體的）、封閉的（沒有端點的）、不自交的（自己跟自己不相交，即沒有黏合處的）曲線。所以，一個平面上的圓圈是一個紐結，它是一個未打結的紐結，我們稱它爲一個“平凡紐結”。

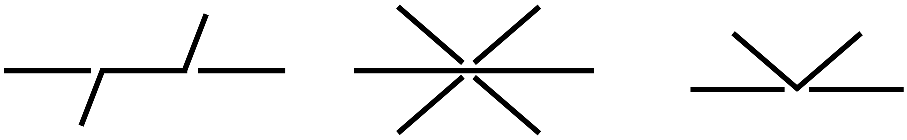
除了繩圈可以打結外，繩圈與繩圈之間還可以互相鈎連、套扣，這也是日常生活中常見的現象，諸如鐵鏈、鑰匙圈等等。因此，我們再定義“鏈環”的概念：由許多條互不相交的簡單閉曲線所構成的空間圖形稱爲鏈環，並稱每一條閉曲線爲其“分支”。下面是具有兩個分支的鏈環。

如果一個紐結（或鏈環）可以經過繩圈的移位變形變成另一個，我們就說這兩個紐結（或鏈環）是等價的，或同痕的，有時乾脆把兩個等價的紐結（或鏈環）視爲相同的。

B. 紐結的投影圖

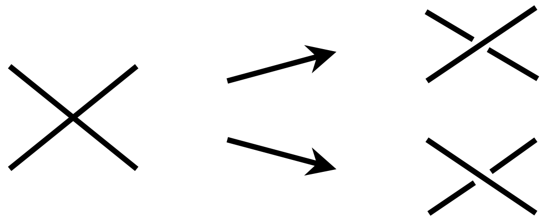
在現實生活中，描述空間的圖形通常是用照片，而照片就是一種取適當方位投影的圖像。對於紐結與鏈環，我們也選取它的一個投影圖來描述它。但是，這種投影圖要能很適切地表示紐結與鏈環，所以選什麼樣的投影圖是有一定標準的，不能隨意給出一張重疊處圖意不清，無法辨別有幾個重疊點的投影圖來描述一個紐結或鏈環，因爲這無助於進一步的判別與分析。

準確地說，我們要求投影圖要滿足：只有有限多個重疊點；每個重疊點都是二重點；在每個二重點處，上下兩線的投影都是互相穿越交叉的。也就是說要避免下面的圖像：

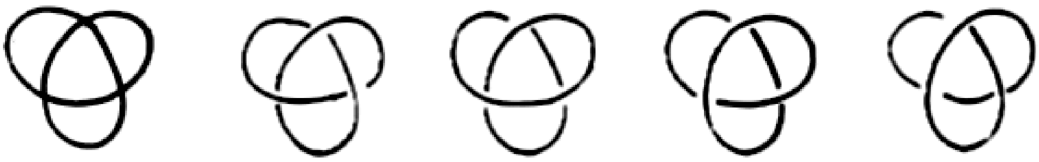


當我們說到投影圖時，總是指已經用虛實線標示出交叉情況的圖。在左下圖這樣一個由自身相交的閉曲線所構成的平面圖形，在每個分岔點處都是四個岔的，我們稱之爲“四岔地圖”。所以每張投影圖都可以確定一張四岔地圖，但是反過來說，從四岔地圖卻無法確定該投影圖，因爲每個分岔點有兩種可能

交叉的情況。



因此，從有 n 個分岔點的四岔地圖一共可以得到 2^n 張不同的投影圖，它們所代表的紐結或鏈環卻不一定互不相同。下圖是從最左邊那張四岔地圖所得到的幾張投影圖。

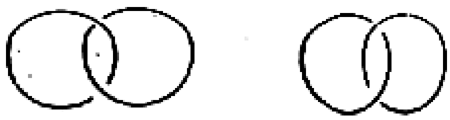


C. 用實驗的方法來判斷以下各對鏈環是否等價？

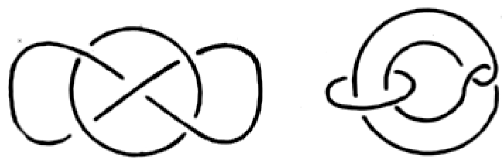
(a) 右手三葉結

(b) 8 字形結

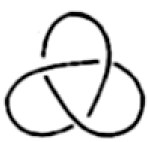
(c) 最簡單的圈套



(d) 懷特海德鏈環



(e) 右手三葉結與左手三葉結



右手三葉結

左手三葉結

(f) 方結與懶散結

方結

懶散結

(g) 反懷特海德鏈環與正懷特海德鏈環

反懷特海德鏈環

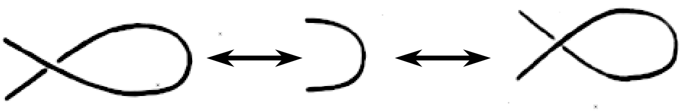
正懷特海德鏈環

D. 投影圖的三種基本變換

紐結與鏈環可以用投影圖來確定，然而等價的鏈環可以有不同的投影圖。因此，要利用投影圖來研究紐結理論，就必須弄清楚繩圈在空間中的移動變形是如何在投影圖上反映出來的。

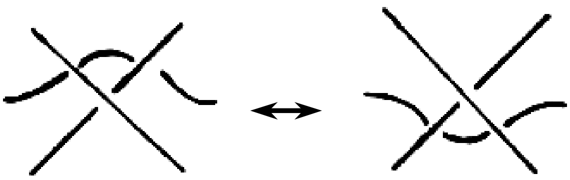
德國數學家瑞德邁斯特（Reidemeister）在 20 年代指出，紐結與鏈環的同痕本質上是由投影圖的三種基本初等變換（R1、R2、R3）來刻劃的。

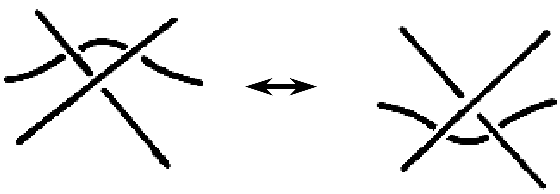
R1：消除或添加一個卷



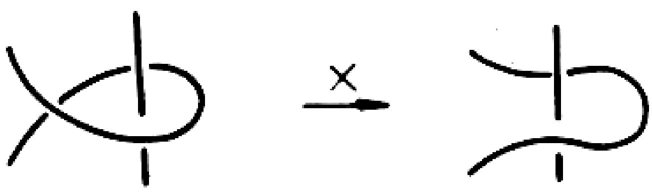
R2：消除或添加一個疊置的二邊形

R3：三角形變換





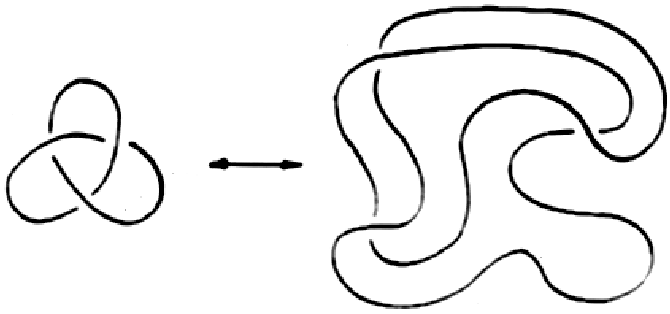
這三種初等變換是在投影圖的局部進行的，在變換的那部份除了所畫出的線以外不能有別的線介入。例如



不是一個合法的 R1 變換，它與正確的作法所得到的結果不一樣：

瑞德邁斯特指出，如果空間中的一個鏈環可以經過繩圈的移位變形變成另一個鏈環，那麼第一個鏈環的投影圖一定可以通過一連串的初等變換變成第二個鏈環的投影圖。

此外，我們還允許投影圖作“平面變形”，也就是說當把平面看成一個薄膜時，刻畫在平面上的圖可能隨平面的伸縮、拉長，產生形變。從下圖來看便可以了解到什麼是平面變形了！

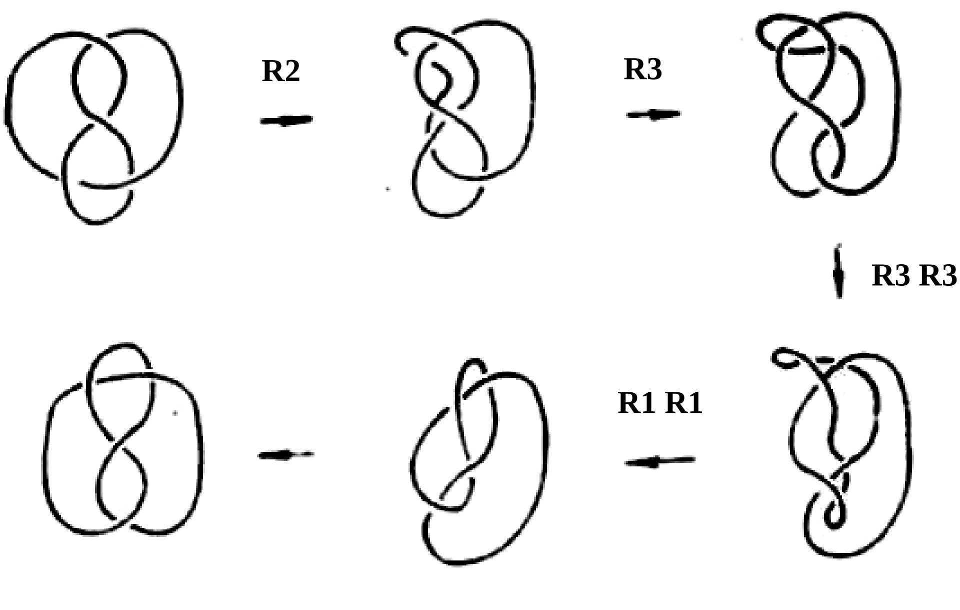


E. 用初等變換鑑別鏈環

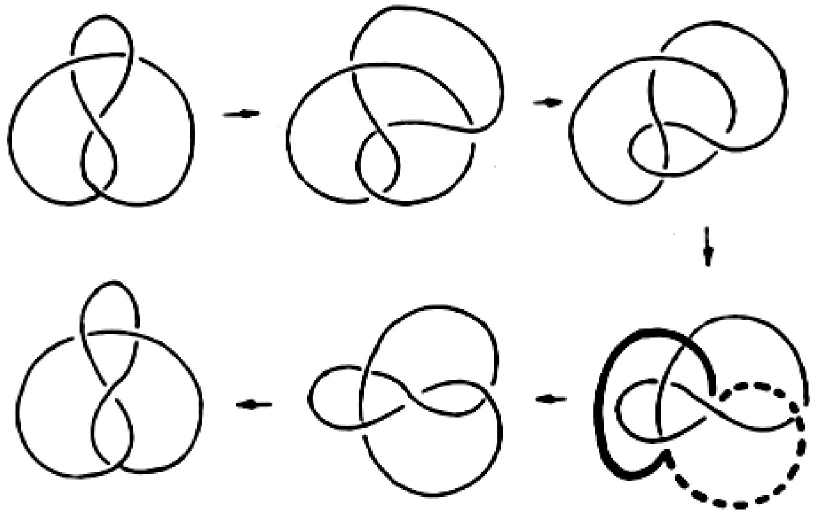
要證實兩個鏈環的等價性，只須用繩子各做一個模型，然後把一個變成另一個。如果要用投影圖來證明它們等價，則應該找出一串由 R1，R2，R3 變換及平面變形所組成的變換，把一個投影圖變成另一個。原則很簡單，實際卻不一定容易。

簡單的例子：

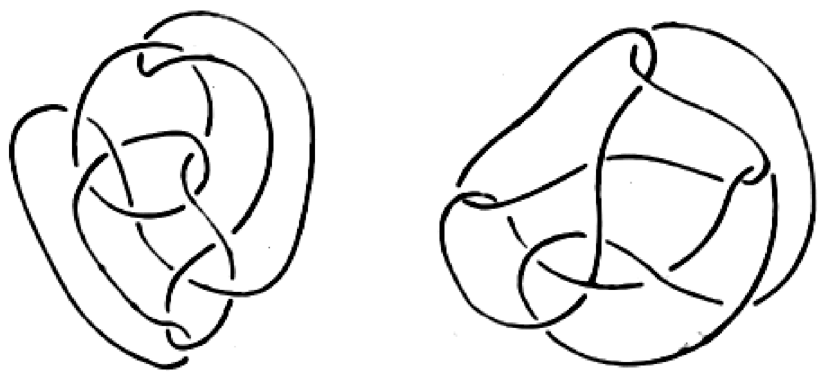
不輕鬆的任務：8 字形結與其鏡像等價！



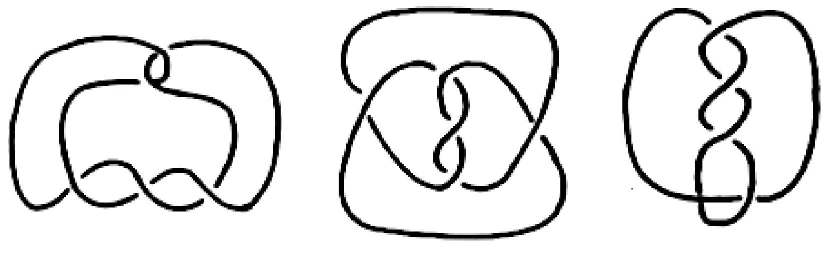
如果我們不拘泥於初等變換，那麼下面的圖將更容易使人相信！圖中用粗實線與粗虛線表明把那條線挪到那個位置。線條只挪動了一次，其餘都是平面變形。



向勇敢的讀者挑戰：下圖兩個紐結投影圖各有 13 交叉點，在 1985 年時就已經知道它們是等價的。您能利用初等變換及平面變形給出證明嗎？



問題：請利用初等變換及平面變形證明下面三個投影圖代表同一個紐結。



六、 85 種打領結的方法

日常在正式的場合裡，男士的穿著通常須要打領帶。但是幾乎沒有人問「爲什麼我們每天打領帶的方式都是一成不變？有沒有別的方法？」

這個問題及其解答被英國劍橋大學聲名顯赫的卡文迪斯實驗室（Cavendish

Laboratory）裡的兩位數學物理學家 Thomas Fink 與 Yong Mao 提出。由於其解答使眾人甚感興趣，所以他們的論文被刊登在全世界著名的科學雜誌 Nature 上。

Fink 和 Mao 分析領結的方法的確是體現數學家如何將實際生活中的問題加以組織、抽象而克服之的好例子。

第一、領帶有兩端，但是在打領結時通常只移動較寬的那端來纏繞而成。Fink 和 Mao 稱此端爲操作端。第二、領帶及其結將人的前胸分割爲三個區域：右側、左側和在領結上方、喉嚨下方，稱之爲中央的區域。打領結的動作就是把領帶的操作端在這三個區域內變動。第三、每一個動作是把領帶的操作端在朝向襯衫和背向襯衫二種情況交互變換，朝向襯衫的下一步恆爲背向襯衫。打領帶動作的最後一步是非常特別的，Fink 和 Mao 稱此活動端穿過結的中間而下拉的動作爲穿透(用記號 T 表示)。

領帶結本質上是一種拓撲結構：實際去構造它們可使它們更易於被理解。藉由觀察打領帶結的方法與在三角化格點上持續移動的對應圖，隱含在領帶結中的拓撲結構可透過適當地操作其投影像來探討。我們由此導出領帶結的對應規則，並根據領帶結的大小、形狀及結的數量加以分類。美觀的結具有對稱性及平衡性的特質。

在這 85 種領帶結中，有些是常見的結法。我們重現 4 種傳統的結法及介紹 9 種新式、優美的結法。對於一些須要耗費較多步數（雖然不切實際）的結法，我們只陳列一些漸近的結果。

A. 最常用的領結

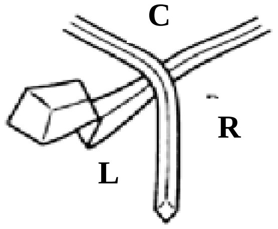
大部份的男士都會兩種領結。最簡單、最常用的領結是四手式（Four-in-hand）的領結，它起源於 19 世紀的英格蘭：車伕用這種結栓住牲畜的脖子，以免使他的馳馬車失控，這個領結至今仍甚爲流行。溫莎公爵曾創造一個結，現稱爲溫莎結，它是一種較大的領結，於 1930 年代末期因溫莎公爵（愛德華八世的前任）而流行。溫莎領結後來它衍生出一個較小的結，稱之爲半溫莎領結。第四種領結叫做柏蒂（Pratt）領結，它發明於 1989 年，在此年 Pratt 結被印成許多大張海報而風靡全世界，而這個結是近 50 年內首次出現的新領結。

據歷史所述，領結通常不是偶然發現的。與其等待半個世紀期待另一種領結的出現，Fink 和 Mao 撰寫論文認真地探究它。

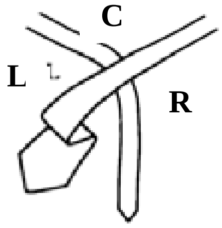
B. 領結是一種活動的結

領帶圍在頸子上，操作較寬（活動）的一端環繞較窄（被動）的一端，使

得完成後的結，後者仍能自由活動。一個領結出初始時是活動端由朝向左側，從上方或下方包住被動端，形成一個三角形的基底。這時將空間分割成右、中和左（R、C、L）三個區域，如下圖。



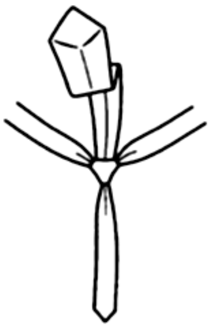
L•⋯

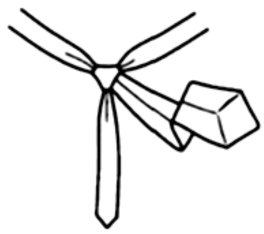


Lᴜ⋯

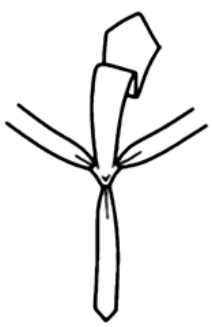
從右方開始的結與從左方開始相對應的結互爲鏡射全等，我們可以省略討論這一類的結。一個結是利用操作活動端連續在上述三角基底纏繞，這個步驟可以想成是一系列的，從某個區域到另一個區域旋轉半圈的動作，活動端的位置及方向可以用 R•、Rᴜ、C•、Cᴜ、L•、Lᴜ 等 6 種記號來表示，其中 R，C，L 是指活動端朝向的方向，另以符號 •、**U**分別表示從前方看去（或說從紙面（襯衫）上方望下）活動端是遠離紙面（襯衫）向外移動或朝向紙面（襯衫）向內移動，可以把它們（ • 、**U**）看成是一支箭的箭頭與箭尾。前述 R•、Rᴜ、C•⋯等等的記號，也可以看成是將活動端作任意次數旋轉半圈到對應位置上的動作記號（如下圖）。因此，類似記號 R•L•等等所表示的一連串動作是不可能做到的。同理，Rᴜ的下一步也不可能是 R•。據此，記錄這一連串動作的過程必在 • 與**U**間交錯變動，並且任兩個連續的動作不可能在相同的區域內產生。


⋯L•⋯


⋯C•⋯

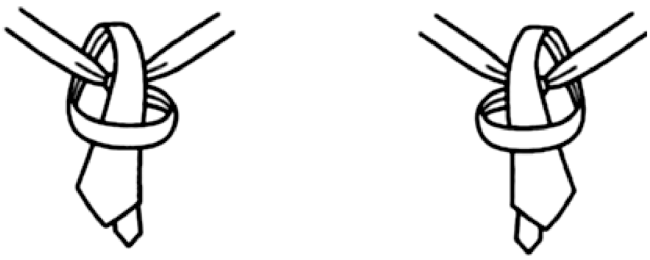

⋯R•⋯


⋯Lᴜ⋯


⋯Cᴜ⋯

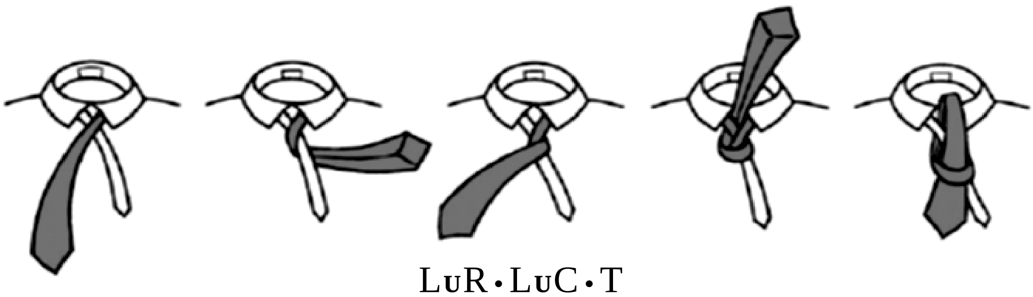

⋯Rᴜ⋯

想完成一個結，最後活動端必須繞到前方位置，也就是說，無論從 R•LU或 L•RU，接這必須從正中間穿出（即 C•），最後穿過在上一系列步驟中於前方所圍繞的圈（結尾符號記作 T，但不算作一個步驟）而完成領結。



…(R•LUC•)T　　　　　　…(R•RUC•)T

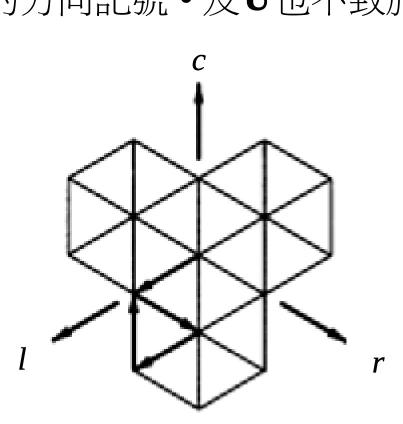
現在我們可以將一個領結用一系列的移動記號(稱爲結列)來表述，這些移動記號從集合{R•，RU，C•，CU，L•，LU}中選取，它從 L•或 LU開始，而最後以 R•LUC•T 或 L•RUC•T 作結尾。這一系列動作是受約制的，任兩個連續的步驟不可以指向相同的區域或方向。例如：四手式的完整結列如下圖所示。



LUR•LUC•T

C. 視領結為隨機的移動

之前所介紹領結的記錄，允許我們把這些結列看成是在三角格子點上的移動。我們以 r，c 及 l 三個軸代表移動至 R，C 及 L 三個區域，並且以單位向量 $\hat{r}$，$\hat{c}$ 及 $\hat{l}$ 表示相對應的動作。因爲連續的動作其方向必在 • 與**U**間交錯變動，且最後的方向必是 •。若從**U**開始必移動偶數步，而從 • 開始必移動奇數步，若省略領結移動的文字表述中的方向記號 • 及**U**也不致於會造成混淆。



由於只在三叉式的區域內移動，我們可規定每一步驟都是沿著軸的正的方向移動，並且任二個連續的移動不會相同。雖然如此，格點上的任何位置均可達到。我們可得到關係式$-\hat{c}=\hat{r}+\hat{l}$，$2\hat{c}=\hat{c}+\hat{l}+\hat{c}+\hat{r}+\hat{c}.$

D. 結的大小

我們將結的大小定義為一個結列中移動的步數，並將結依大小分類。在結移動的文字標記中，結的大小就等於記號的個數。我們將結的大小（即旋轉半圈的次數）記作 h。聯繫第一步及最後一步的條件可知，最小的結是 L•RuC•T，其大小 $h=3$。基於美學的考量，領結的大小必須是有個上限的，不然打出的領結又短又胖。經實際估算，我們建議 $h\le 9$。

依結的大小我們定義函數$K(h)$，它的值等於在限制第一步及最後一步的條件下，大小為 h 的結的個數。我們規定$K(h)$是第一步為 $\hat{l}$，大小為 h 的結。令函數$F_{\hat{r}}(n)$為從 $\hat{l}$ 開始、$\hat{r}$ 結束，大小為 n 的結的個數；函數$F_{\hat{c}}(n)$為從 $\hat{l}$ 開始、$\hat{c}$ 結束，大小為 n 的結的個數。

由於任何一次的移動都可以有二個其他的區域可選擇，因此我們可得

$$F_{\hat{r}}(n)+F_{\hat{c}}(n)+F_{\hat{l}}(n)=2^{n-1}. \tag{1}$$

因為在最後幾個步驟的排列只能是 $\hat{r}\,\hat{l}\,\hat{c}$ 或 $\hat{l}\,\hat{r}\,\hat{c}$ 二種，所以我們只須討論 $n=h-2$ 次移動的情況即可，這些移動由 $\hat{l}$ 開始，以 $\hat{r}$ 或 $\hat{l}$ 結束，而剩下的最後二步的移動方式則無自由選擇的餘地。

我們由考慮$F_{\hat{l}}(n)$開始，因為 $\hat{l}$ 的前一步可能是 $\hat{r}$ 或 $\hat{c}$。因此，

$$F_{\hat{l}}(n+2)=F_{\hat{r}}(n+1)+F_{\hat{c}}(n+1) \tag{2}$$

同理可得

$$\begin{aligned} F_{\hat{l}}(n+2) &= F_{\hat{l}}(n)+F_{\hat{c}}(n)+F_{\hat{l}}(n)+F_{\hat{r}}(n) \\ &= 2F_{\hat{l}}(n)+F_{\hat{c}}(n)+F_{\hat{r}}(n) \end{aligned} \tag{3}$$

結合(1)及(3)可得

$$F_{\hat{l}}(n+2)=F_{\hat{l}}(n)+2^{n-1} \tag{4}$$

由初始條件$F_{\hat{l}}(1)=1$，$F_{\hat{l}}(2)=0$解遞迴關係式(4)可得

$$F_{\hat{l}}(n)=\frac{2}{3}\left(2^{n-2}+(-1)^{n-1}\right)\ ^{\text{註}} \tag{5}$$

$F_{\hat{r}}(n)$的遞迴式與(4)類似，只是初始條件為$F_{\hat{r}}(1)=0$，$F_{\hat{r}}(2)=1$。據此可得

$$F_{\hat{r}}(n) = \frac{1}{3}\left(2^{n-1} + (-1)^n\right) \tag{6}$$

大小爲 h 的結的數量等於由 $\hat{l}$ 開始移動 $h-2$ 步，而以 $\hat{r}$ 或 $\hat{l}$ 結束的結的數量。此即

$$K(h) = F_{\hat{r}}(h-2) + F_{\hat{l}}(h-2) = \frac{1}{3}\left(2^{h-2} - (-1)^{h-2}\right)$$

其中，$K(1) = 0$.

所以，我們所關注的結之全部數量爲

$$K(1) + K(2) + K(3) + \Lambda\,\Lambda\ + K(8) + K(9)$$
$$= 0 + 0 + 1 + 1 + 3 + 5 + 11 + 21 + 43 = 85.$$

E. 結的形狀

我們以旋轉半圈的次數來刻劃結的大小，但是這樣仍無法描述結的形狀。從實際操作中可以發現，結的形狀與 $\hat{l}$ 、$\hat{r}$ 、$\hat{c}$ 等移動有關。由於對稱的考量，通常 $\hat{l}$ 與 $\hat{r}$ 的移動數量相同，所以我們以 $\hat{c}$ 的數量 g 來刻劃結的形狀。

具有相同 h 與 g 的結，我們把它們歸爲同類。比值 g/h 愈小的結，其寬度愈細小。例如：四手式的領結 $g/h = 1/4$；比值 g/h 愈大的結，其寬度愈寬厚。例如：溫莎結 $g/h = 3/8$ 。

一般而言，$0 < g/h < 1/2$ ，而 $g/h < 1/6$ 太細且不平衡，並不美觀。所以只考慮 $1/6 < g/h < 1/2$ 的情形。合乎此條件的結有

$\{(g,h)\}$ = {(1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 5), (1, 6), (2, 6), (2, 7), (3, 7), (2, 8), (3, 8), (2, 9), (3, 9), (4, 9)} 等 13 種。

這 13 種合乎此條件的結列表如下：

h	γ	γ/h	$K(h,\gamma)$	s	b	Name	Sequence	KS	SKT
3	1	0.33	1	0	0		$L_\odot R_\otimes C_\odot T$	y	0_1
4	1	0.25	1	1	1	Four-in-hand	$L_\otimes R_\odot L_\otimes C_\odot T$	n	3_1
5	1	0.20	1	0	2		$L_\odot R_\otimes L_\odot R_\otimes C_\odot T$	y	4_1
5	2	0.40	2	1	0	Pratt knot	$L_\odot C_\otimes R_\odot L_\otimes C_\odot T$	n	0_1
6	1	0.17	1	1	3		$L_\otimes R_\odot L_\otimes R_\odot L_\otimes C_\odot T$	n	5_2
6	2	0.33	4	0	0	Half-Windsor	$L_\otimes R_\odot C_\otimes L_\odot R_\otimes C_\odot T$	y	0_1
7	2	0.29	6	1	1		$L_\odot R_\otimes L_\odot C_\otimes R_\odot L_\otimes C_\odot T$	n	0_1
7	3	0.43	4	0	1		$L_\odot C_\otimes R_\odot C_\otimes L_\odot R_\otimes C_\odot T$	y	3_1
8	2	0.25	8	0	2		$L_\otimes R_\odot L_\otimes C_\odot R_\otimes L_\odot R_\otimes C_\odot T$	y	7_4
8	3	0.38	12	1	0	Windsor	$L_\otimes C_\odot R_\otimes L_\odot C_\otimes R_\odot L_\otimes C_\odot T$	n	3_1
9	2	0.22	10	1	3		$L_\odot R_\otimes L_\odot R_\otimes C_\odot L_\otimes R_\odot L_\otimes C_\odot T$	n	8_4
9	3	0.33	24	0	0		$L_\odot R_\otimes C_\odot L_\otimes R_\odot C_\otimes L_\odot R_\otimes C_\odot T$	y	4_1
9	4	0.44	8	1	2		$L_\odot C_\otimes R_\odot C_\otimes L_\odot C_\otimes R_\odot L_\otimes C_\odot T$	n	5_2

F. 對稱

結的對稱是基於美觀的考量。我們定義以 $\hat{r}$ 及 $\hat{l}$ 數量的差來估算它，即

$$s = \left| \sum_{i=1}^{h} x_i \right|,$$

其中，若第 i 步是 $\hat{r}$，則 $x_i = 1$；若第 i 步是 $\hat{l}$，則 $x_i = -1$；其它情形則規定 $x_i = 0$。s 值愈小代表這個結愈對稱。因此，若 $h-g$ 是偶數，$s = 0$ 的結看起來是對稱的。若 $h-g$ 是奇數，$s = 1$ 的結看起來是對稱的。

G. 平衡

前述 g 和 s 的值表述一個結的成份，而平衡則與移動的分佈情況有關。它考量的是這些移動方向混合的程度。

一個平衡的結是綁的緊緻且能保持其外形的，這是美學上的第二個要求。

以 s_i 表示第 i 步的移動，若從 s_i 到 s_{i+1} 的變換是順時鐘方向的變換，則定義其移動的方向 $w_i(s_i, s_{i+1}) = 1$；否則令它等於 -1。這裡順時鐘方向的變換規定爲 $\hat{c}\,\hat{r}$，$\hat{r}\,\hat{l}$，$\hat{l}\,\hat{c}$ 等移動。所以結的平衡值 b 可表示爲

$$b = \frac{1}{2} \sum_{i=2}^{h-1} \left| w_i - w_{i-1} \right|.$$

b 的值即爲移動時轉向的次數。從美學的觀點來看，b 的值愈小愈好。

附註：

註 1.由初始條件 $F_{\hat{l}}(1) = 1$，$F_{\hat{l}}(2) = 0$ 解遞迴關係式 $F_{\hat{l}}(n+2) = F_{\hat{l}}(n) + 2^{n-1}$.

(a). 當 $n = 2k$ 時，

$$\begin{aligned}
F_{\hat{l}}(2k+2) &= F_{\hat{l}}(2k) + 2^{2k-1} \\
&= F_{\hat{l}}(2k-2) + 2^{2k-3} + 2^{2k-1} \\
&= \Lambda\ \Lambda \\
&= F(2) + 2^{2-1} + 2^{4-1} + \Lambda + 2^{2k-3} + 2^{2k-1} \\
&= \frac{2[(2^2)^k - 1]}{2^2 - 1} \quad (\text{等比級數求和}) \\
&= \frac{2}{3}(2^{2k} - 1) \\
&= \frac{2}{3}(2^{m-2} - 1), \quad (m = 2k+2)
\end{aligned}$$

即 $F_{\hat{l}}(m) = \frac{2}{3}\left(2^{m-2} - 1\right).$

(b). 當 $n = 2k+1$ 時，

$$
\begin{aligned}
F_{\hat{l}}(2k+3) &= F_{\hat{l}}(2k+1)+2^{2k} \\
&= F_{\hat{l}}(2k-1)+2^{2k-2}+2^{2k} \\
&= \Lambda\ \Lambda \\
&= F(1)+2^{0}+2^{2}+\Lambda\ +2^{2k-2}+2^{2k} \\
&= \frac{2}{3}(2^{2k+1}+1) \\
&= \frac{2}{3}(2^{m-2}+1),\quad (m-2=2k+1)
\end{aligned}
$$

即 $F_{\hat{l}}(m)=\frac{2}{3}\left(2^{m-2}+1\right).$

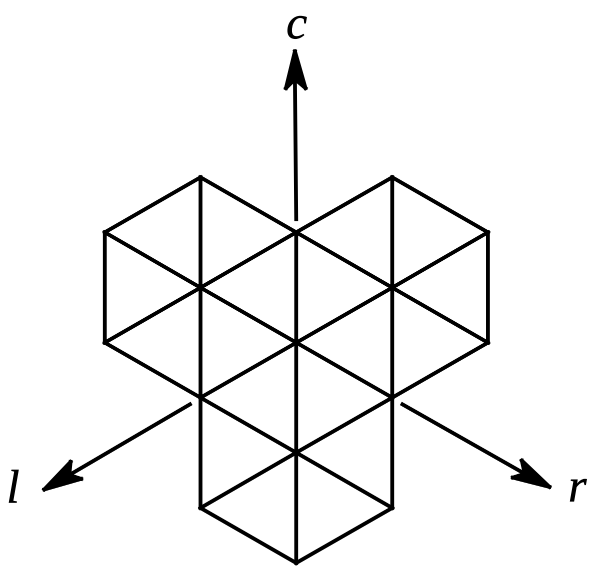
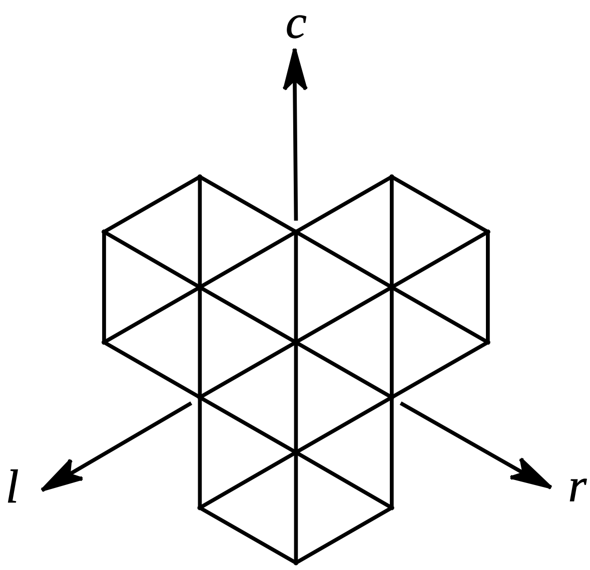
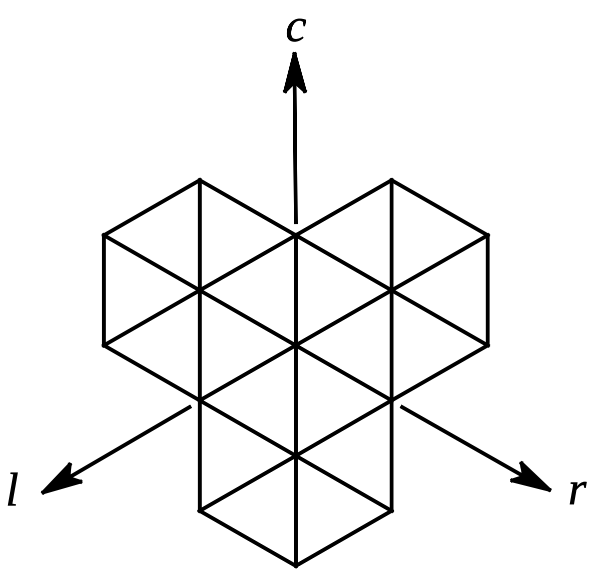
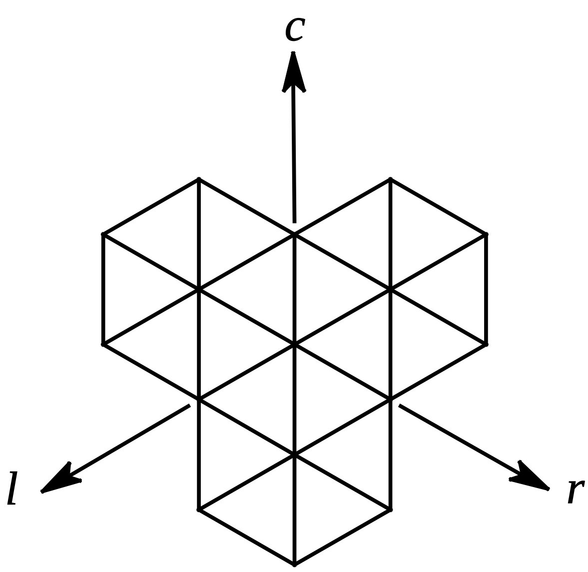
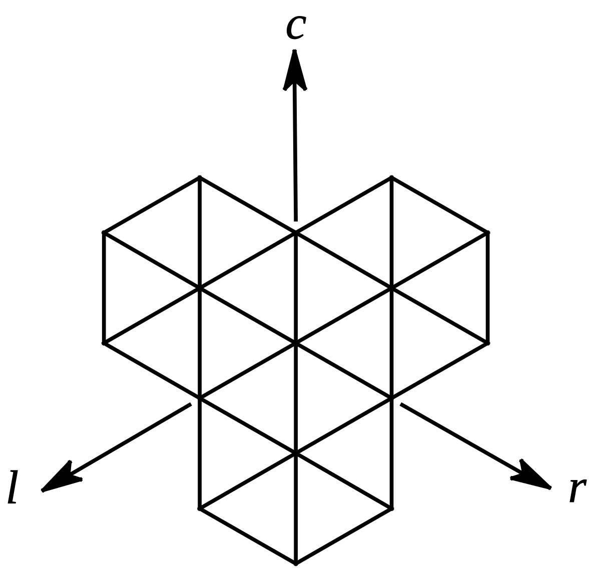
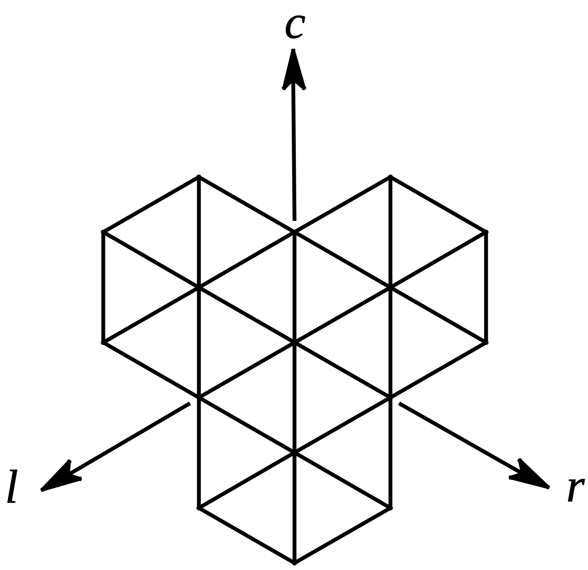
綜合(a)與(b)，得到 $F_{\hat{l}}(n)=\frac{2}{3}\left(2^{n-2}+(-1)^{n-1}\right).$

註 2. 85 種領帶結的標記表示列表

n	*h*	*γ*	*sequence*	*s*	*b*	*k*	*name*
1	3	1	L⊙R⊗C⊙T	0	0	y	Oriental
2	4	1	L⊗R⊙L⊗C⊙T	1	1	n	four-in-hand
3	5	1	L⊙R⊗L⊙R⊗C⊙T	0	2	y	Kelvin
4	5	2	L⊙C⊗R⊙L⊗C⊙T	1	0	n	Nicky
5	5	2	L⊙C⊗L⊙R⊗C⊙T	1	1	y	Pratt
6	6	1	L⊗R⊙L⊗R⊙L⊗C⊙T	1	3	n	Victoria
7	6	2	L⊗R⊙C⊗L⊙R⊗C⊙T	0	0	y	half-Windsor
8	6	2	L⊗R⊙C⊗R⊙L⊗C⊙T	0	1	n	
9	6	2	L⊗C⊙R⊗L⊙R⊗C⊙T	0	1	y	
10	6	2	L⊗C⊙L⊗R⊙L⊗C⊙T	2	2	n	
11	7	1	L⊙R⊗L⊙R⊗L⊙R⊗C⊙T	0	4	y	
12	7	2	L⊙R⊗L⊙C⊗R⊙L⊗C⊙T	1	1	n	St. Andrew
13	7	2	L⊙R⊗C⊙L⊗R⊙L⊗C⊙T	1	1	n	
14	7	2	L⊙R⊗L⊙C⊗L⊙R⊗C⊙T	1	2	y	
15	7	2	L⊙R⊗C⊙R⊗L⊙R⊗C⊙T	1	2	y	
16	7	2	L⊙C⊗R⊙L⊗R⊙L⊗C⊙T	1	2	n	
17	7	2	L⊙C⊗L⊙R⊗L⊙R⊗C⊙T	1	3	y	
18	7	3	L⊙C⊗R⊙C⊗L⊙R⊗C⊙T	0	1	y	Plattsburgh
19	7	3	L⊙C⊗R⊙C⊗R⊙L⊗C⊙T	0	2	n	
20	7	3	L⊙C⊗L⊙C⊗R⊙L⊗C⊙T	2	2	n	
21	7	3	L⊙C⊗L⊙C⊗L⊙R⊗C⊙T	2	3	y	
22	8	1	L⊗R⊙L⊗R⊙L⊗R⊙L⊗C⊙T	1	5	n	
23	8	2	L⊗R⊙L⊗C⊙R⊗L⊙R⊗C⊙T	0	2	y	Cavendish

24	8	2	L⊛R⊙L⊛R⊙C⊛L⊙R⊛C⊙T	0	2	y	
25	8	2	L⊛R⊙C⊛L⊙R⊛L⊙R⊛C⊙T	0	2	y	Christensen
26	8	2	L⊛R⊙L⊛R⊙C⊛R⊙L⊛C⊙T	0	3	n	
27	8	2	L⊛R⊙C⊛R⊙L⊛R⊙L⊛C⊙T	0	3	n	
28	8	2	L⊛C⊙R⊛L⊙R⊛L⊙R⊛C⊙T	0	3	y	
29	8	2	L⊛R⊙L⊛C⊙L⊛R⊙L⊛C⊙T	2	3	n	
30	8	2	L⊛C⊙L⊛R⊙L⊛R⊙L⊛C⊙T	2	4	n	
31	8	3	L⊛C⊙R⊛L⊙C⊛R⊙L⊛C⊙T	1	0	n	Windsor
32	8	3	L⊛C⊙L⊛R⊙C⊛L⊙R⊛C⊙T	1	1	y	
33	8	3	L⊛C⊙R⊛L⊙C⊛L⊙R⊛C⊙T	1	1	y	
34	8	3	L⊛R⊙C⊛L⊙C⊛R⊙L⊛C⊙T	1	1	n	
35	8	3	L⊛C⊙L⊛R⊙C⊛R⊙L⊛C⊙T	1	2	n	
36	8	3	L⊛R⊙C⊛R⊙C⊛L⊙R⊛C⊙T	1	2	y	
37	8	3	L⊛R⊙C⊛L⊙C⊛L⊙R⊛C⊙T	1	2	y	
38	8	3	L⊛C⊙R⊛C⊙L⊛R⊙L⊛C⊙T	1	2	n	
39	8	3	L⊛R⊙C⊛R⊙C⊛R⊙L⊛C⊙T	1	3	n	
40	8	3	L⊛C⊙L⊛C⊙R⊛L⊙R⊛C⊙T	1	3	y	
41	8	3	L⊛C⊙R⊛C⊙R⊛L⊙R⊛C⊙T	1	3	y	
42	8	3	L⊛C⊙L⊛C⊙L⊛R⊙L⊛C⊙T	3	4	n	
43	9	1	L⊙R⊛L⊙R⊛L⊙R⊛L⊙R⊛C⊙T	0	6	y	
44	9	2	L⊙R⊛L⊙R⊛C⊙L⊛R⊙L⊛C⊙T	1	3	n	Grantchester
45	9	2	L⊙R⊛L⊙C⊛R⊙L⊛R⊙L⊛C⊙T	1	3	n	
46	9	2	L⊙R⊛L⊙R⊛L⊙C⊛R⊙L⊛C⊙T	1	3	n	
47	9	2	L⊙R⊛C⊙L⊛R⊙L⊛R⊙L⊛C⊙T	1	3	n	
48	9	2	L⊙R⊛L⊙R⊛C⊙R⊛L⊙R⊛C⊙T	1	4	y	
49	9	2	L⊙R⊛L⊙C⊛L⊙R⊛L⊙R⊛C⊙T	1	4	y	
50	9	2	L⊙R⊛L⊙R⊛L⊙C⊛L⊙R⊛C⊙T	1	4	y	
51	9	2	L⊙R⊛C⊙R⊛L⊙R⊛L⊙R⊛C⊙T	1	4	y	
52	9	2	L⊙C⊛R⊙L⊛R⊙L⊛R⊙L⊛C⊙T	1	4	n	
53	9	2	L⊙C⊛L⊙R⊛L⊙R⊛L⊙R⊛C⊙T	1	5	y	
54	9	3	L⊙R⊛C⊙L⊛R⊙C⊛L⊙R⊛C⊙T	0	0	y	Hanover
55	9	3	L⊙R⊛C⊙R⊛L⊙C⊛R⊙L⊛C⊙T	0	1	n	

56	9	3	L⊙R⊛C⊙L⊛R⊙C⊛R⊙L⊛C⊙T	0	1	n	
57	9	3	L⊙C⊛R⊙L⊛R⊙C⊛L⊙R⊛C⊙T	0	1	y	
58	9	3	L⊙C⊛R⊙L⊛C⊙R⊛L⊙R⊛C⊙T	0	1	y	
59	9	3	L⊙R⊛C⊙R⊛L⊙C⊛L⊙R⊛C⊙T	0	2	y	
60	9	3	L⊙C⊛R⊙L⊛R⊙C⊛R⊙L⊛C⊙T	0	2	n	
61	9	3	L⊙R⊛L⊙C⊛R⊙C⊛L⊙R⊛C⊙T	0	2	y	
62	9	3	L⊙R⊛C⊙L⊛C⊙R⊛L⊙R⊛C⊙T	0	2	y	
63	9	3	L⊙R⊛L⊙C⊛R⊙C⊛R⊙L⊛C⊙T	0	3	n	
64	9	3	L⊙R⊛C⊙R⊛C⊙L⊛R⊙L⊛C⊙T	0	3	n	
65	9	3	L⊙C⊛L⊙R⊛C⊙R⊛L⊙R⊛C⊙T	0	3	y	
66	9	3	L⊙C⊛R⊙C⊛L⊙R⊛L⊙R⊛C⊙T	0	3	y	
67	9	3	L⊙C⊛R⊙C⊛R⊙L⊛R⊙L⊛C⊙T	0	4	n	
68	9	3	L⊙C⊛L⊙R⊛L⊙C⊛R⊙L⊛C⊙T	2	2	n	
69	9	3	L⊙C⊛L⊙R⊛C⊙L⊛R⊙L⊛C⊙T	2	2	n	
70	9	3	L⊙C⊛R⊙L⊛C⊙L⊛R⊙L⊛C⊙T	2	2	n	
71	9	3	L⊙C⊛L⊙R⊛L⊙C⊛L⊙R⊛C⊙T	2	3	y	
72	9	3	L⊙R⊛L⊙C⊛L⊙C⊛R⊙L⊛C⊙T	2	3	n	
73	9	3	L⊙R⊛C⊙L⊛C⊙L⊛R⊙L⊛C⊙T	2	3	n	
74	9	3	L⊙R⊛L⊙C⊛L⊙C⊛L⊙R⊛C⊙T	2	4	y	
75	9	3	L⊙R⊛C⊙R⊛C⊙R⊛L⊙R⊛C⊙T	2	4	y	
76	9	3	L⊙C⊛L⊙C⊛R⊙L⊛R⊙L⊛C⊙T	2	4	n	
77	9	3	L⊙C⊛L⊙C⊛L⊙R⊛L⊙R⊛C⊙T	2	5	y	
78	9	4	L⊙C⊛R⊙C⊛L⊙C⊛R⊙L⊛C⊙T	1	2	n	Balthus
79	9	4	L⊙C⊛L⊙C⊛R⊙C⊛L⊙R⊛C⊙T	1	3	y	
80	9	4	L⊙C⊛R⊙C⊛R⊙C⊛L⊙R⊛C⊙T	1	3	y	
81	9	4	L⊙C⊛R⊙C⊛L⊙C⊛L⊙R⊛C⊙T	1	3	y	
82	9	4	L⊙C⊛L⊙C⊛R⊙C⊛R⊙L⊛C⊙T	1	4	n	
83	9	4	L⊙C⊛R⊙C⊛R⊙C⊛R⊙L⊛C⊙T	1	4	n	
84	9	4	L⊙C⊛L⊙C⊛L⊙C⊛R⊙L⊛C⊙T	3	4	n	
85	9	4	L⊙C⊛L⊙C⊛L⊙C⊛L⊙R⊛C⊙T	3	5	y	


c
l
r

c
l
r

c
l
r

c
l
r

c
l
r

c
l
r