討論題樣本

1. 有三實數 $a_1, a_2, a_3 >1$，且對任意 $i = 1,2,3$ 滿足 $a_i^2>S(a_i-1)$，其中 $S=a_1+a_2+a_3$。試證

$$1/(a_1+a_2)+1/(a_2+a_3) +1/(a_3+a_1)>1$$

2. 將平面上的所有整數格點著上黃色，紅色或藍色，且每一種顏色的點都至少有一個，試證一定存在三個不同色的頂點構成一直角三角形。

3. $a_1,a_2,\ldots,a_n,b_1,b_2,\ldots,b_n$ 是任意實數，證明

$$|a_1-a_2|+\ldots+|a_1-a_n|+\ldots+|a_{n-1}-a_n|+|b_1-b_2|+\ldots+|b_1-b_n|+\ldots+|b_{n-1}-b_n|$$
$$< |a_1-b_1|+\ldots+|a_1-b_n|+|a_2-b_1|+\ldots+|a_n-b_n|$$

4. 正整數 x,y,z 滿足 $x^y+1=z^2$，其中 $x>2, y>1$。令 p 爲 x 的質因數個數，q 爲 y 的質因數個數，證明 $p\geqq q+2$。

5. 試確定所有整數數對(a,b)，使得 x^2+ax+b 可以是某個形如 $x^n+c_{n-1}x^{n-1}+\ldots+c_1x+c_0$ 的多項式的因式，其中每個 c_i 滿足 $c_i^2=1$。

6. 對於一個三元數組(a,b,c)，我們可以進行如下操作：選其中兩個數，將他們一個變成它們的和，另一個變成它們的乘積。試問是否可能從(3,4,5)開始，在有限次操作以後，再度達到一組可以構成直角三角形的三邊長？

7. 試判斷對哪些實數 α，下列函數方程對於所有 R->R 的函數有唯一解：

$$f(x^2+y+f(y)) = f(x)^2 +\alpha y$$

8. 有 100 個人圍成一圈，這 100 個人來自 25 個團體，每個團體 4 人。試證他們可以被分成 4 組，使得每一組的人都彼此互不相鄰且來自不同的團體。

敬啓者：

這份題目是我們第一天將討論的(部份)題目，希望各位有興趣參加的同學可以花些時間想一想。題目基本上是按照難度排序，最簡單的大概比 IMO 最簡單的題目還難一些，最難的大概跟 IMO 最難的題目差不多。話又說回來，難度這種事情對每個人來說也不一樣，根本說不準，大家參考參考就好。

依我之見，像奧林匹亞這樣的初等數學應該著重在自己從題目中磨出東西來，自己絞盡腦汁想過的題目才能真正的吸收。也因此，雖然在今日的數學研究者是站在前人的肩膀上(這個肩膀可高的很)繼續開創新的東西，在奧林匹亞中我們卻很難依賴任何的知識。因此，奧林匹亞本質上是有一定門檻的：每個有興趣的人都思考一些好的數學題目，但要碰觸真正的奧林匹亞卻需要一定的資質。

很多優秀數學家過去都根本拿不到所謂的奧林匹亞金牌，他們往往是靠自己的努力學習並藉由吸收前人的知識和想法，來讓自己提升到更高的境界。但既然奧林匹亞並不是一門以某些知識為核心的領域，那麼若要只藉由知識的吸收來提高自己的等級，一方面是效率低落，另一方面這些知識也沒有實際的意義。因此，我會建議中學生多做和多看有意思的數學，培養興趣和思維是好的，但數學奧林匹亞如果不適合就不要太專注於其中。

所以我要說的是，一方面我不希望那些資質不是那麼好的同學覺得自己不適合讀數學，否則臺灣以後優秀的數學家就會少了至少一半。另一方面，我又必須請大家來參加這個活動之前稍做考慮，大約而言，我建議有興趣參加的同學要能夠在沒有時間限制下，做出上面八題中的兩題(不要輕易放棄！)，否則的話你在五天的活動中會受到相當大的痛苦(或者，用我們常用的說法，你會被狂電)。

另外我很高興可以在這裡說，在過去這一個禮拜我已經成功邀請到幾乎所有臺灣在過去一年來在數學奧林匹亞的領域內表現最優秀的高中生。參加的同學可以期待我們將會有非常精彩的討論。

2006/12/17, 蔡政江