「2006 年青少年數學國際城市邀請賽」參賽代表遴選決選試題

編號:__________校名:________ 國中 姓名:_______________

作答時間: 二 小 時

第一部分：填充題，每小題 5 分，共 60 分

1. 設 a,b,c 為實數，若 $a+b=7, b+c=9, a+c=8,$ 則 $abc=$ ______。

Ans: 60

2. 設 a,b 為實數，若 $\dfrac{a+3b}{a-b}=3$，則 $\dfrac{a}{b}=$ ______。

Ans: 3

3.已知一個梯形的四邊長分別? 1,2,3,4,則此梯形的面積為______。

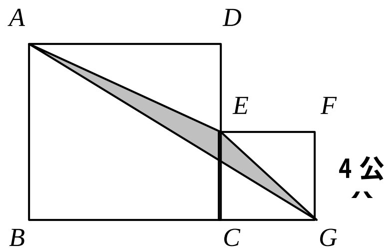
Ans: $\dfrac{10}{3}\sqrt{2}$

4.如果正整數 n 小於 100，且滿足條件 $[\dfrac{n}{2}]+[\dfrac{n}{3}]+[\dfrac{n}{6}]=n,$ 其中 $[x]$ 表示不超過實數 x 的最大整數，則滿足這樣條件的正整數 n 共有______個。

Ans: 16

5. 如圖， $ABCD$ 和 $CEFG$ 為兩個正方形， $\overline{FG}=4$ 公分，則 ΔAEG 的面積為______平方公分。

Ans: 8



6. 若 $\dfrac{a}{3b}=\dfrac{b}{2a-5b}=\dfrac{6a-15b}{a}$, 則 $\dfrac{4a^2-5ab+6b^2}{a^2-2ab+3b^2}$ 的值為______。

Ans: $\dfrac{9}{2}$

7. 3^{2006} 的最後 2 位數是多少？______。

Ans: 29

$3^4=81,$ 且 $3^{64}\equiv 81^{16}\equiv 81\equiv 3^4 \pmod{100}.$

8.已知正三角形 ABC 的邊長? 2, M 是 $\overline{AB}$ 邊的中點， P 是 $\overline{BC}$ 邊上任意一點，
如果 $\overline{PA}+\overline{PM}$ 的最大值和最小值分別表? a 和 b ,則 $a^2-b^2=$______。

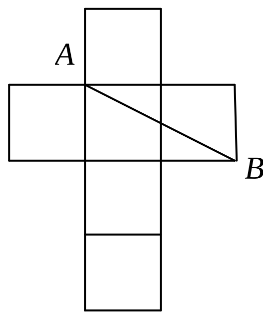
Ans: $4\sqrt{3}$

9. 有一本書從第一頁起開始連續為每一頁編號，總共用了 852 個數字，則這本書的頁數是______。

Ans: 320

10.下圖是由六個大小相同的正方形所組成的一個十字圖形，每個正方形只有邊重合，已知 $\overline{AB}$ ＝10 公分，則此十字形的面積為______平方公分？

Ans: 120

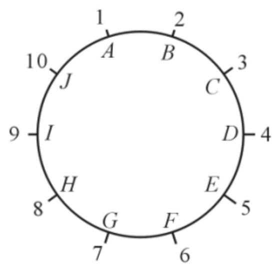


11.有一個四位數滿足下列條件：用此四位數的末二位數(如果它的十位數是零,就只用個位數字)去除此四位數,其商為一個完全平方數,且這個完全平方數正好是原四位數的前二位數加 1 以後的平方, 則滿足這種條件的四位數中最大為___________。

Ans: 9801

12.如圖，有十個人圍成一圓圈，且依座號 $1, 2, 3, \cdots, 10$ 而坐。每人選擇一整數，分別是 $A, B, C, \cdots, J$ ，並將這個數告訴他左右兩個鄰座的人。每人跟著算出他左右兩個鄰座所選的數的算術平均數。若每個人所算出的算術平均數與其座號相等，則 F 的值等於______。

Ans: 1



第二部分：計算證明，每題 20 分,共 60 分

(注意：在答案卷上請依題號作答，須詳列過程及說明理由)

1. **設** a, b, c **皆為整數，其中** $1<a<b<c$ **,如果** $(ab-1)(bc-1)(ca-1)$ **能被** abc **所整除，試求** a, b, c **的值。**

(解)：

(1) $\because a,b,c \in N$ **且** $1<a<b<c$

$\therefore$ **依題意** $\dfrac{(ab-1)(bc-1)(ca-1)}{abc}=k \quad k\in N$

$\Rightarrow \ abc-(a+b+c)+\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}-\dfrac{1}{abc}=k \quad k\in N$

又 $\because 1<a<b<c$ **且** $a,b,c\in N$

$\therefore \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}-\dfrac{1}{abc}=\dfrac{ab+bc+ca-1}{abc}>0$

(2)**令** $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}-\dfrac{1}{abc}=n \in N$

$\because \ 1<a<b<c \Rightarrow 1>\dfrac{1}{a}>\dfrac{1}{b}>\dfrac{1}{c}$ ， $a,b,c\in N$

$\therefore \ \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}$ **最大值為** $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{13}{12}<2$ ， $\dfrac{1}{abc}$ **最大值為** $\dfrac{1}{24}<1$

$\therefore \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}-\dfrac{1}{abc}<2$

$ie \ \ \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}-\dfrac{1}{abc}=n=1$

(3) $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}-\dfrac{1}{abc}=\dfrac{ab+bc+ca-1}{abc}=1$

$\Rightarrow ab+bc+ca=abc+1$

①**若** a,b,c **為三偶數** $\Rightarrow$ **偶+偶+偶=偶?奇=偶+1 (不合)**

②**若** a,b,c **為二偶數一奇數** $\Rightarrow$ **偶+偶+偶=偶?奇=偶+1 (不合)**

③**若** a,b,c **為一偶二奇** $\Rightarrow$ **偶+偶+奇=奇=偶+1 (合)**

④**若** a,b,c **為三奇數** $\Rightarrow$ **奇+奇+奇=奇?偶=奇+1 (不合)**

$\therefore$ **由(1)(2)(3)知：**

$a,b,c\in N$ **其中有一偶數二奇數**

且 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}>1$ ， $\dfrac{1}{abc}<1$ ， $1<a<b<c$

只有 $a=2$ ， $b=3$ ， $c=5$ **符合題意**

2. **直角三角形** ABC **中，** $\angle C=90°$ **,如果其週長為** $2\sqrt{7}+4$ **,且斜邊上的中線長為** 2 **,試求** ΔABC **的面積與其內切圓的面積。**

(解)：

(1)**設** D **為** $\overline{AB}$ **中點，** $\therefore\ \overline{AD}=\overline{BD}=\overline{CD}=2\ \therefore\ \overline{AB}=\overline{AD}+\overline{BD}=4$

令 $\overline{AB}=c=4$ **，** $\overline{BC}=a$ **，** $\overline{AC}=b$ **，如圖：**

又 $\because\ a+b+c=2\sqrt{7}+4$

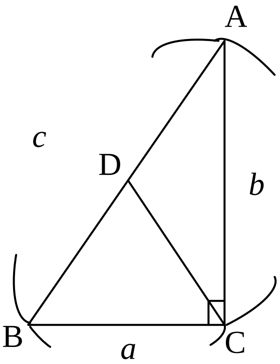
$\therefore\ a+b=2\sqrt{7}$

$c^2=a^2+b^2=4^2=16$

$\therefore\ \Delta ABC$ **面積** $=\frac{1}{2}ab=\frac{1}{4}\left[(a+b)^2-(a^2+b^2)\right]$

$=\frac{1}{4}\left[(2\sqrt{7})^2-16\right]=3$

$\Rightarrow ab=6$



(2)**設圓** o **為** ΔABC **之內切圓，分別切三邊於** E,F,G**，如圖**

則 $\overline{OG}=\overline{OF}=\overline{CG}=\overline{CF}=r$ (**內切圓半徑**)

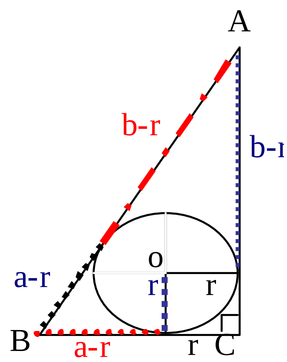
$\therefore\ \overline{AG}=\overline{AE}=b-r$ **，** $\overline{BF}=\overline{BE}=a-r$

$\therefore\ a-r+b-r=\overline{AB}=c=4$

$\Rightarrow\ a+b-2r=4$

$\therefore\ r=\frac{a+b-4}{2}=\frac{2\sqrt{7}-4}{2}=\sqrt{7}-2$

$\therefore$ **內切圓** o **面積** $=p\ r^2=p\,(\sqrt{7}-2)^2=p\,(11-4\sqrt{7})$



3. **四邊形** $DEGF$ **中，** $\overline{DE}=\overline{DF}$ **，** $\overline{GE}=\overline{GF}$ **，** $\angle DEG=90^\circ$ **和** $\angle DFG=90^\circ$ **，** A **是** $\overline{EF}$ **和** $\overline{DG}$ **的交點。** J **是** $\overline{EG}$ **延長線上的一點，過** E **作** $\overline{FJ}$ **的平行線，和** $\overline{FG}$ **的延長線相交於** I **，** H **是** D **到** $\overline{IJ}$ **的垂足。試證** A **，** F **，** J **和** H **共圓。**

(參考解法)：

連 AJ **和** ID**，**
因為 FGJ **及** IGE **是相似三角形，**
所以 JG/GF = EG/GI**，**
又因為 FAG **和** DEG **是相似三角形，**
所以 GF/AG = DG/EG**。**
相乘後得出 JG/AG = DG/IG**，**
因為∠JGA=∠DGI**，**
所以 JAG **和** DIG **是相似三角形，**
得出∠JAG=∠DIG**。**
而∠JAF=90°-∠JAG=90°-∠DIG=∠IDF**。**
因為 D**，**I**，**H **和** F **共圓，**∠IDF+∠IHF=180°**，**
所以∠JAF+∠JHF=180°**，**A**，**F**，**J **和** H **共圓。**