



International Mathematics Competition 2008 (IMC 2008)

World Youth Mathematics Intercity Competition

個人賽試題

答題指引：

- 請填寫您的姓名、編號及隊名。
- 試題包括填充題 12 題與計算證明題 3 題，填充題只須在空格內填寫答案，不須計算過程，若題目有不只一個答案，則全部答對才給分，每題 5 分；計算證明題必須詳細填寫計算過程或證明，每題 20 分，根據答題情況給與部份分數。
- 答題時間：120 分鐘。
- 不得使用任何計算器具。
- 可使用鉛筆、藍色或黑色原子筆作答。
- 所有紙張在考試結束時要全部收回。

Traditional Chinese Version

青少年數學國際城市邀請賽

個人賽試題

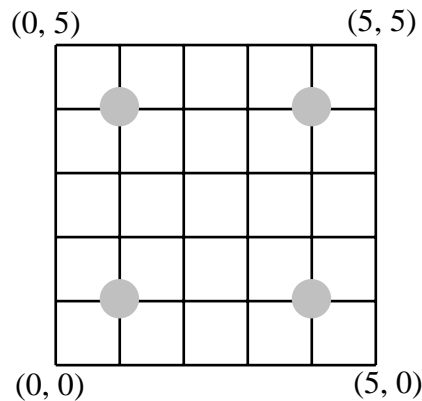
答題時間：120 分鐘

2008/10/28 泰國清邁

隊名：_____ 姓名：_____ 編號：_____ 得分：_____

第一部份：填充題，請將答案填寫在空格內，不須列出演算過程，共十二題，
每題 5 分。

1. 如圖是 5×5 的網格。一隻螞蟻在網格左下角 $(0, 0)$ 位置，每次能向上走一格或者向右走一格，要到達右上角 $(5, 5)$ 位置，且不能經過點 $(1, 1)$, $(1, 4)$, $(4, 1)$ 和 $(4, 4)$ ，請問共有多少種不同的走法？



答案：_____

2. 若 $a-2$ 是正整數且是 $3a^2-2a+10$ 的約數，請問 a 的所有可能值之總和是多少？

答案：_____

3. 已知實數 a 、 b 、 c 滿足 $a+b+c=11$ 與 $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} = \frac{13}{17}$ ，請問

$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}$ 的值是多少？

答案：_____

4. 已知 x 為實數，請問 $\sqrt{2008-x} + \sqrt{x-2000}$ 的最大值是多少？

答案：_____

5. 一個十位數，其數碼只能是 2 或 3，且沒有兩個 3 是相鄰的。請問這樣的十位數共有多少個？

答案：_____

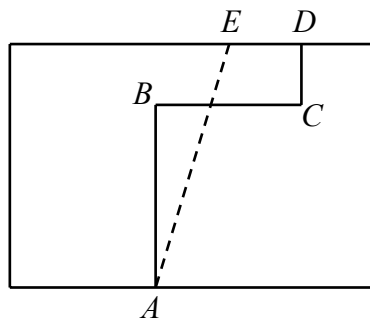
6. 圓周上有和為 94 的 n 個 ($n > 3$) 整數，每個數都等於它後面（按順時針方向）的兩個數的差的絕對值。請問 n 的可能值是什麼？

答案：_____

7. 已知 M 是一個四位的完全平方數。若將 M 的千位數減少 3 而個位數增加 3 可以得到另一個四位的完全平方數。請問 M 的值是多少？

答案：_____

8. 如圖，折線 $A-B-C-D$ 的每一條線段都平行於矩形的邊，它把矩形分成面積相等的兩部分。點 E 在矩形的邊上，使得線段 AE 也平分矩形的面積，已知線段 $AB=30$ ， $BC=24$ ， $CD=10$ ，則 DE 之長度是多少？

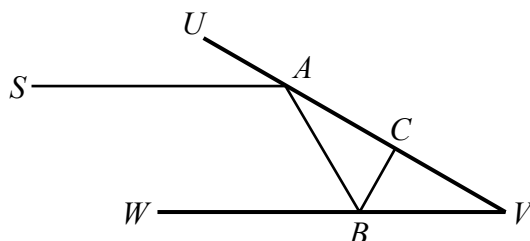


答案：_____

9. 已知函數 $f(x) = ax^2 - c$ ，其中 a, c 為實數。若 $-4 \leq f(1) \leq -1$ 且 $-1 \leq f(2) \leq 2$ ，則 $f(8)$ 的最大值是多少？

答案：_____

10. 兩塊平面鏡相交成 30° 放置，交點為 V 。一束水平的光從光源 S 發出，平行於其中一面鏡子 VW ，在另一面鏡子 UV 上的 A 點處反射，又在鏡子 VW 上的 B 點處反射，然後在鏡子 UV 上的 C 點處反射，經過若干次反射後，光束又返回到 S 。若 $SA=AV=1$ ，則光束經過的總路程之長度是多少？

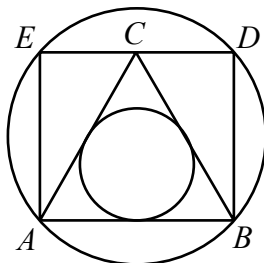


答案：_____

11. 請問使得 $n^2 - n + 11$ 有四個質因數(不必互異)的正整數 n 的最小值是多少？

答案：_____

12. 如圖所示， $\triangle ABC$ 是正三角形，點 C 在矩形 $ABDE$ 的 DE 邊上。已知 $\triangle ABC$ 的內切圓半徑是 1，請問矩形 $ABDE$ 的外接圓直徑是多少？



答案：_____

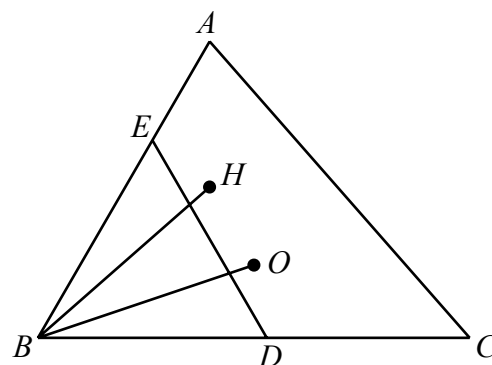
第二部份：計算及證明題，必須寫下計算或證明過程。共三題，每題 20 分。

1. 請問算式 $\left[\sqrt{2008 + \sqrt{2008 + \sqrt{2008 + \dots + \sqrt{2008}}}} \right]$ 之值（這裏的 2008 共出現了 2008 次）是多少？（ $[x]$ 表示不超過 x 的最大整數。）

答案：_____

2. 在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ABC=60^\circ$ ，點 O 、 H 分別是 $\triangle ABC$ 的外心、垂心。點 D 在邊 BC 上，使得 $BD=BH$ ；點 E 在邊 AB 上，使得 $BE=BO$ 。已知 $BO=1$ ，請問 $\triangle BDE$ 的面積是多少？

（註：三角形的外心是三角形外接圓的圓心；
垂心是三高的交點。）



答案：_____

3. 已知 t 為正整數，若 2^t 可以表示成 $a^b \pm 1$ (其中 a 、 b 是大於 1 的整數)，請找出滿足上述條件所有可能的 t 值。

答案：_____