

# 2009 亞洲城市青少年數學奧林匹亞

## 參賽代表遴選初選

### 個人數學競賽試題

編號: \_\_\_\_\_ 校名: \_\_\_\_\_ 國中 姓名: \_\_\_\_\_

作答時間: 二小時

#### 第一部分: 填充題, 每小題 5 分, 共 60 分

(注意: 請在每題末預留空格處作答, 只須填答案不須列出過程)

1. 有一道計算題是將一個數乘以 409, 結果小明列直乘式時誤將被乘數的個位數乘以 4 所得的值寫在從右邊算起第二位的下方, 而非第三位的下方, 因為他忽略了乘以 0。結果他所得的答案與正確答案相差了 308520。請問原算式的被乘數是什麼?

答: \_\_\_\_\_

2. 有一位數學家到某明星學校參觀資優班, 校長介紹資優班時說: 本校資優班恰好有  $\frac{2}{3}$  的學生參加化學競賽、恰好有  $\frac{3}{4}$  的學生參加生物競賽、恰好有  $\frac{4}{5}$  的學生參加物理競賽、恰好有  $\frac{5}{6}$  的學生參加數學競賽。當校長剛說完話時, 數學家就說: 那麼您們學校至少有 12 位同學四項競賽都有參加。請問該校資優班共有多少位學生?

答: \_\_\_\_\_ 位

3. 已知  $x$ 、 $y$ 、 $z$  為非 0 實數且  $x^2 = yz$ 、 $x^4 = yz + zx + xy$ , 請問  $x^2$  的最小值為何?

答: \_\_\_\_\_

4. 已知  $x$ 、 $y$ 、 $z$  為實數且  $2^{x+y} = 10$ 、 $2^{y+z} = 20$ 、 $2^{z+x} = 30$ 。請問  $2^x$  之值為何?

答: \_\_\_\_\_

5. 將一個正立方體的二個面塗上紅色、二個面塗上藍色、二個面塗上綠色。請問共有多少種不同的塗法? (正立方體經旋轉、翻轉後相同位置上的面所塗的顏色均相同, 則視為是相同的塗法)

答: \_\_\_\_\_ 種

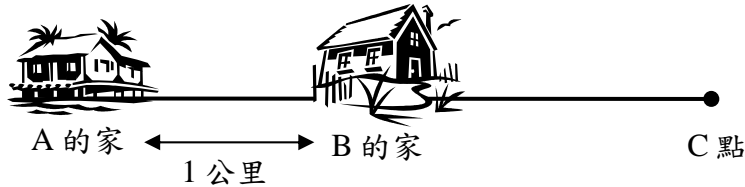
6. 請找出所有滿足以下條件且介於 500 與 1000 之間的數:

- (i) 可同時被 3 與 7 整除;
- (ii) 數碼和為 15;
- (iii) 所有數碼的乘積為 48。

答: \_\_\_\_\_

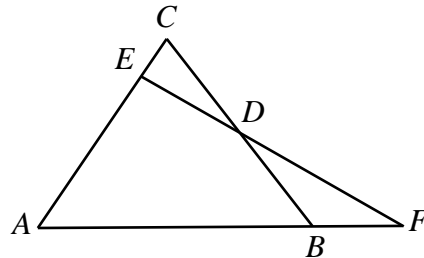
(翻面繼續作答)

7. A、B 兩人的家相距 1 公里（如圖所示），他們的朋友相約在下午 6:00 要在 A 的家裡烤肉，A 打電話向 B 借烤肉架，並於下午 5:15 出門以每小時 5 公里的速度朝 B 的方向行走，而 B 則一個人抬著烤肉架於下午 5:00 出門，但卻走錯方向，朝 C 的方向行走，直到 A 在 C 點追上 B 時，兩人才以每小時 4 公里的速度折返，兩人合力抬烤肉架而準時在下午 6:00 回到 A 的家。請問 B 一個人抬烤肉架由 B 走到 C 的速度為每小時多少公里？



答：\_\_\_\_\_ 公里/小時

8. 在  $\triangle ABC$  中， $AB=12$ 、 $D$  為  $BC$  的中點、 $AE=4EC$ 、直線  $ED$  交  $AB$  的延長線於點  $F$ 。試求線段  $BF$  之長。



答：\_\_\_\_\_

9. 已知直角三角形的周長為  $2 + \sqrt{6}$ ，斜邊上的中線長為 1。求這個三角形的面積。

答：\_\_\_\_\_

10. 令  $A'$ 、 $B'$ 、 $C'$ 、 $D'$  分別在凸四邊形  $ABCD$  的四個邊  $DA$ 、 $AB$ 、 $BC$ 、 $CD$  的延長線上，使得  $A$ 、 $B$ 、 $C$ 、 $D$  分別為  $DA'$ 、 $AB'$ 、 $BC'$ 、 $CD'$  的中點。已知四邊形  $ABCD$  的面積為  $120 \text{ cm}^2$ ，請問四邊形  $A'B'C'D'$  的面積為多少  $\text{cm}^2$ ？

答：\_\_\_\_\_  $\text{cm}^2$

11. 已知  $\overline{a_1 a_2 a_3 \cdots a_{21} a_{22}} \times 7 = \overline{a_{22} a_1 a_2 a_3 \cdots a_{21}}$ ，且  $\overline{a_1 a_2 a_3 \cdots a_{21} a_{22}}$  之數碼和超過 100，請問  $\overline{a_1 a_2 a_3 \cdots a_{21} a_{22}}$  之數碼和是多少？

答：\_\_\_\_\_

12. 給定  $n$  個數  $1$ 、 $3$ 、 $3^2$ 、 $3^3$ 、 $\dots$ 、 $3^n$ ，從這  $n$  個數中每次取 1 個數，或者取幾個不同的數求和（每次每個數只能取一次），可以得到一個數，將這些數從小到大依次排列起來，它們是  $1$ 、 $3$ 、 $4$ 、 $9$ 、 $10$ 、 $12$ 、 $\dots$ ，請問第 100 個數是什麼？

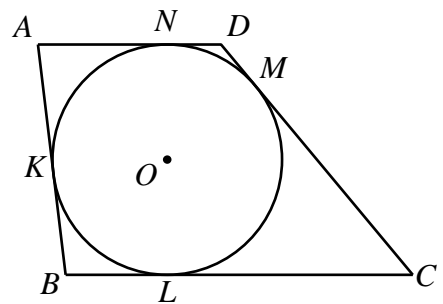
答：\_\_\_\_\_

第二部分：計算證明，每題 20 分，共 60 分

(注意：請依題號在空白處作答，須詳列過程及說明理由)

1. 能否將 0、1、2、 $\dots$ 、9 排在一圓圈上，使得任兩個相鄰的數之差恰好是 3、4 或 5？若可，請舉一例；若否，請證明。

2. 在梯形  $ABCD$  中， $AD \parallel BC$ ，它的內切圓分別切  $AB$ 、 $BC$ 、 $CD$ 、 $DA$  於點  $K$ 、 $L$ 、 $M$ 、 $N$ 。試證明  $AK \times KB = CM \times MD$ 。



(翻面繼續作答)

3.  $A$ 、 $B$ 、 $C$ 、 $D$ 、 $E$  為小於 1000 的質數，它們的各位數碼恰好包含 0~9 各一個，且  $A+B+C-D=E$ ，其中  $E>A>B>C>D$ 。試求  $A$ 、 $B$ 、 $C$ 、 $D$ 、 $E$ 。