

2009 亞洲城市青少年數學奧林匹亞

參賽代表遴選初選

個人數學競賽試題

編號: _____ 校名: _____ 國中 姓名: _____

作答時間: 二小時

第一部分: 填充題, 每小題 5 分, 共 60 分

(注意: 請在每題末預留空格處作答, 只須填答案不須列出過程)

1. 有一道計算題是將一個數乘以 409, 結果小明列直乘式時誤將被乘數的個位數乘以 4 所得的值寫在從右邊算起第二位的下方, 而非第三位的下方, 因為他忽略了乘以 0。結果他所得的答案與正確答案相差了 308520。請問原算式的被乘數是什麼?

答: _____

2. 有一位數學家到某明星學校參觀資優班, 校長介紹資優班時說: 本校資優班恰好有 $\frac{2}{3}$ 的學生參加化學競賽、恰好有 $\frac{3}{4}$ 的學生參加生物競賽、恰好有 $\frac{4}{5}$ 的學生參加物理競賽、恰好有 $\frac{5}{6}$ 的學生參加數學競賽。當校長剛說完話時, 數學家就說: 那麼您們學校至少有 12 位同學四項競賽都有參加。請問該校資優班共有多少位學生?

答: _____ 位

3. 已知 x 、 y 、 z 為非 0 實數且 $x^2 = yz$ 、 $x^4 = yz + zx + xy$, 請問 x^2 的最小值為何?

答: _____

4. 已知 x 、 y 、 z 為實數且 $2^{x+y} = 10$ 、 $2^{y+z} = 20$ 、 $2^{z+x} = 30$ 。請問 2^x 之值為何?

答: _____

5. 將一個正立方體的二個面塗上紅色、二個面塗上藍色、二個面塗上綠色。請問共有多少種不同的塗法? (正立方體經旋轉、翻轉後相同位置上的面所塗的顏色均相同, 則視為是相同的塗法)

答: _____ 種

6. 請找出所有滿足以下條件且介於 500 與 1000 之間的數:

- (i) 可同時被 3 與 7 整除;
- (ii) 數碼和為 15;
- (iii) 所有數碼的乘積為 48。

答: _____

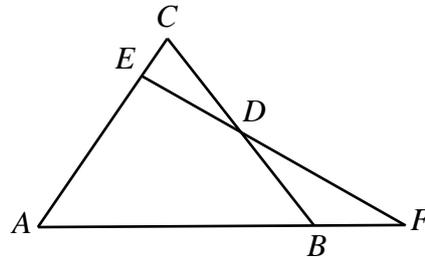
(翻面繼續作答)

7. A、B 兩人的家相距 1 公里（如圖所示），他們的朋友相約在下午 6:00 要在 A 的家裡烤肉，A 打電話向 B 借烤肉架，並於下午 5:15 出門以每小時 5 公里的速度朝 B 的方向行走，而 B 則一個人抬著烤肉架於下午 5:00 出門，但卻走錯方向，朝 C 的方向行走，直到 A 在 C 點追上 B 時，兩人才以每小時 4 公里的速度折返，兩人合力抬烤肉架而準時在下午 6:00 回到 A 的家。請問 B 一個人抬烤肉架由 B 走到 C 的速度為每小時多少公里？



答：_____ 公里/小時

8. 在 $\triangle ABC$ 中， $AB=12$ 、 D 為 BC 的中點、 $AE=4EC$ 、直線 ED 交 AB 的延長線於點 F 。試求線段 BF 之長。



答：_____

9. 已知直角三角形的周長為 $2 + \sqrt{6}$ ，斜邊上的中線長為 1。求這個三角形的面積。

答：_____

10. 令 A' 、 B' 、 C' 、 D' 分別在凸四邊形 $ABCD$ 的四個邊 DA 、 AB 、 BC 、 CD 的延長線上，使得 A 、 B 、 C 、 D 分別為 DA' 、 AB' 、 BC' 、 CD' 的中點。已知四邊形 $ABCD$ 的面積為 120 cm^2 ，請問四邊形 $A'B'C'D'$ 的面積為多少 cm^2 ？

答：_____ cm^2

11. 已知 $\overline{a_1 a_2 a_3 \cdots a_{21} a_{22}} \times 7 = \overline{a_{22} a_1 a_2 a_3 \cdots a_{21}}$ ，且 $\overline{a_1 a_2 a_3 \cdots a_{21} a_{22}}$ 之數碼和超過 100，請問 $\overline{a_1 a_2 a_3 \cdots a_{21} a_{22}}$ 之數碼和是多少？

答：_____

12. 給定 n 個數 1 、 3 、 3^2 、 3^3 、 \dots 、 3^n ，從這 n 個數中每次取 1 個數，或者取幾個不同的數求和（每次每個數只能取一次），可以得到一個數，將這些數從小到大依次排列起來，它們是 1 、 3 、 4 、 9 、 10 、 12 、 \dots ，請問第 100 個數是什麼？

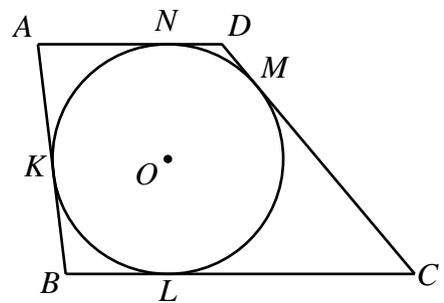
答：_____

第二部分：計算證明，每題 20 分，共 60 分

(注意：請依題號在空白處作答，須詳列過程及說明理由)

1. 能否將 0、1、2、 \dots 、9 排在一圓圈上，使得任兩個相鄰的數之差恰好是 3、4 或 5？若可，請舉一例；若否，請證明。

2. 在梯形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ，它的內切圓分別切 AB 、 BC 、 CD 、 DA 於點 K 、 L 、 M 、 N 。試證明 $AK \times KB = CM \times MD$ 。



(翻面繼續作答)

3. A 、 B 、 C 、 D 、 E 為小於 1000 的質數，它們的各位數碼恰好包含 0~9 各一個，且 $A+B+C-D=E$ ，其中 $E>A>B>C>D$ 。試求 A 、 B 、 C 、 D 、 E 。