2009 亞洲城市青少年數學奧林匹亞

參賽代表遴選初選

個人數學競賽試題

編 號: ______________ 校 名: ______________ 國中 姓 名: ______________

作答時間: 二 小 時

第一部分：填充題，每小題 5 分，共 60 分

(注意：請在每題末預留空格處作答，只須填答案不須列出過程)

1. 有一道計算題是將一個數乘以 409，結果小明列直乘式時誤將被乘數的個位數乘以 4 所得的值寫在從右邊算起第二位的下方，而非第三位的下方，因為他忽略了乘以 0。結果他所得的答案與正確答案相差了 308520。請問原算式的被乘數是什麼？

   【參考解法】

   若令被乘數為 a，則由題意可知 $409a-49a=308520$，即 $360a=308520$，故 $a=857$。

   ANS：857

2. 有一位數學家到某明星學校參觀資優班，校長介紹資優班時說：本校資優班恰好有 $\frac{2}{3}$ 的學生參加化學競賽、恰好有 $\frac{3}{4}$ 的學生參加生物競賽、恰好有 $\frac{4}{5}$ 的學生參加物理競賽、恰好有 $\frac{5}{6}$ 的學生參加數學競賽。當校長剛說完話時，數學家就說：那麼您們學校至少有 12 位同學四項競賽都有參加。請問該校資優班共有多少位學生？

   【參考解法】

   由校長介紹中知有 $\frac{2}{3}$ 的學生參加化學競賽、有 $\frac{3}{4}$ 的學生參加生物競賽可得知至少有 $\frac{3}{4}-\frac{1}{3}=\frac{5}{12}$ 的學生參加這兩項競賽，再加上得知有 $\frac{4}{5}$ 的學生參加物理競賽，故至少有 $\frac{4}{5}-\frac{7}{12}=\frac{13}{60}$ 的學生參加這三項競賽，再由有 $\frac{5}{6}$ 的學生參加數學競賽可知至少有 $\frac{5}{6}-\frac{47}{60}=\frac{3}{60}=\frac{1}{20}$ 的學生參加四項競賽，因此資優班學生有 $12\div\frac{1}{20}=240$ 位學生。

   ANS：240 位

3. 已知 x、y、z 為非 0 實數且 $x^2 = yz$、$x^4 = yz + zx + xy$，請問 x^2 的最小值為何？

【參考解法】

$$x^4 = yz + zx + xy = x^2 + x(y+z) \geq x^2 + x \times 2\sqrt{yz} = x^2 + 2x|x|$$

$\Rightarrow x^2(x^2 - 1) \geq 2x|x|$

$\Rightarrow x^4(x^2 - 1)^2 \geq 4x^4$

$\Rightarrow (x^2 - 1)^2 - 4 \geq 0$

$\Rightarrow (x^2 + 1)(x^2 - 3) \geq 0$

$\Rightarrow x^2 - 3 \geq 0$

$\Rightarrow x^2 \geq 3$

ANS: 3

4. 已知 x、y、z 為實數且 $2^{x+y} = 10$、$2^{y+z} = 20$、$2^{z+x} = 30$。請問 2^x 之值為何？

【參考解法】

令 $2^x = X$、$2^y = Y$、$2^z = Z$，則可得：

$2^{x+y} = 2^x \times 2^y = XY = 10$、$2^{y+z} = 2^y \times 2^z = YZ = 20$、$2^{z+x} = 2^z \times 2^x = ZX = 30$。

故知 $XYZ = \sqrt{30 \times 20 \times 10} = 20\sqrt{15}$，即 $2^x = X = \dfrac{XYZ}{YZ} = \sqrt{15}$。

ANS: $\sqrt{15}$

5. 將一個正立方體的二個面塗上紅色、二個面塗上藍色、二個面塗上綠色。請問共有多少種不同的塗法？（正立方體經旋轉、翻轉後相同位置上的面所塗的顏色均相同，則視為是相同的塗法）

【參考解法】

(i) 正立方體三對平行的面皆塗上相同的顏色時，共有 1 種塗法；

(ii) 正立方體三對平行的面僅一對塗上相同的顏色時，共有 3 種塗法；

(iii)正立方體三對平行的面皆塗上不同的顏色時，共有 2 種塗法；

因此共 1+3+2=6 種塗法。

ANS:6 種

6. 請找出所有滿足以下條件且介於 500 與 1000 之間的數：

(i) 可同時被 3 與 7 整除；

(ii) 數碼和為 15；

(iii) 所有數碼的乘積為 48。

【參考解法】

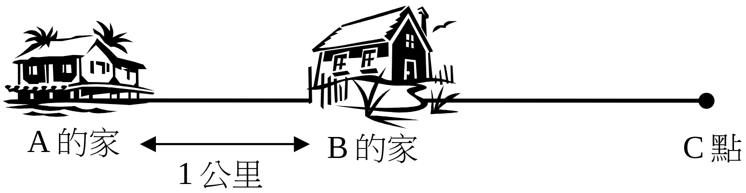
因所求為三位數，故將 48 分解為三個數碼的乘積之表示法有：

1×6×8、2×3×8、2×4×6、3×4×4

其中滿足數碼和為 15 的為 1×6×8，故可能的數有 861、816、681、618，它們都是 3 之倍數，而當中為 7 之倍數只有 861。

ANS: 861

7. A、B 兩人的家相距 1 公里（如圖所示），他們的朋友相約在下午 6：00 要在 A 的家裡烤肉，A 打電話向 B 借烤肉架，並於下午 5：15 出門以每小時 5 公里的速度朝 B 的家的方向行走，而 B 則一個人抬著烤肉架於下午 5：00 出門，但卻走錯方向，朝 C 的方向行走，直到 A 在 C 點追上 B 時，兩人才以每小時 4 公里的速度折返，兩人合力抬烤肉架而準時在下午 6：00 回到 A 的家。請問 B 一個人抬烤肉架由 B 走到 C 的速度為每小時多少公里？



【參考解法】

令 B 的家與 C 點的距離為 x 公里。

因 A 從出發到 C 點再回到 A 的家共花費 $\frac{3}{4}$ 小時，故

$$\frac{1+x}{5}+\frac{1+x}{4}=\frac{3}{4}$$

$$x=\frac{2}{3}$$

A 從出發到 C 點共花費 $\frac{1}{3}$ 小時， 故 B 一個人抬烤肉架由 B 走到 C 共花費 $\frac{7}{12}$ 小時，故知其速度為：

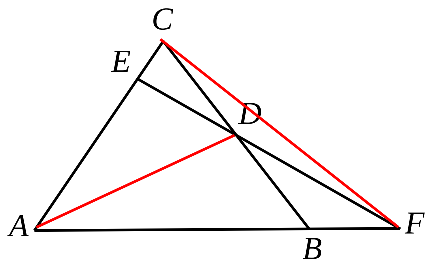
$$\frac{2}{3}\div\frac{7}{12}=\frac{8}{7}$$

因此 B 一個人抬烤肉架由 B 走到 C 的速度為 $\frac{8}{7}$ 公里/小時。

ANS：$\frac{8}{7}$ 公里/小時

8. 在△ABC 中，AB=12、D 為 BC 的中點、AE=4EC、直線 ED 交 AB 的延長線於點 F。試求線段 BF 之長。

【參考解法 1】



連接 CF、AD。因 D 為 BC 的中點，故△BDF 的面積與△CDF 的面積相等；再由 AE=4EC 可知△ADF 的面積為△CDF 的面積的 4 倍，即△ADB 的面積為△BDF 的面積的 3 倍；因△ADB 與△BDF 的面積比即為 AB：BF，故 BF=12÷3=4。

【參考解法 2】

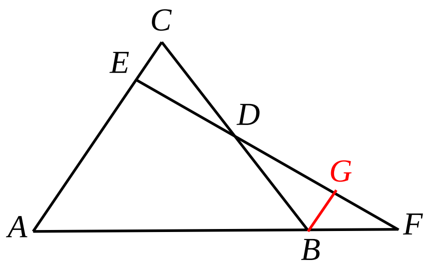
過 B 點作 AC 的平行線交 EF 於 G 點。

可知△CDE≅△BDG，故 $BG=CE$，

因此 AE：BG=4：1。

而在△AFE 中，AF：BF=AE：BG，

故可得 AB：BF=3：1，即 BF=12÷3=4。



ANS：4

9. 已知直角三角形的周長為$2+\sqrt{6}$，斜邊上的中線長為 1。求這個三角形的面積。

【參考解法】

因斜邊上的中線長為 1，故斜邊長度為 1×2=2，即兩股長之和為$\sqrt{6}$；令兩股長分別為 a、b，則三角形的面積為$\frac{1}{2}ab$且$a+b=\sqrt{6}$、$a^2+b^2=2^2=4$，

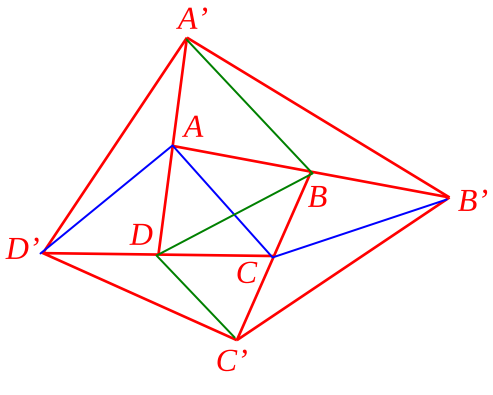
故$\frac{1}{2}ab=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}((a+b)^2-(a^2+b^2))=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}(6-4)=\frac{1}{2}$。

ANS：$\frac{1}{2}$

10. 令 A'、B'、C'、D'分別在凸四邊形 $ABCD$ 的四個邊 DA、AB、BC、CD 的延長線上，使得 A、B、C、D 分別為 DA'、AB'、BC'、CD'的中點。已知四邊形 $ABCD$ 的面積為 120 cm^2，請問四邊形 $A'B'C'D'$的面積為多少 cm^2？

【參考解法】

依題意，可繪出圖形如下：



作補助線 AC、AD'、$B'C$，則可知△ACD、△ADD'、△$AA'D'$的面積相等以及△ABC、△$BB'C$、△$B'CC'$的面積相等；

作補助線 BD、BA'、$C'D$，則可知△ABD、△ABA'、△$BB'A'$的面積相等以及△BCD、△$CC'D$、△$D'DC'$的面積相等；

故知

四邊形 $A'B'C'D'$的面積

=3△ACD+3△ABC+2△ABD+2△BCD=5×120 cm^2=600 cm^2

ANS：600 cm^2

11. 已知$\overline{a_1a_2a_3\cdots a_{21}a_{22}}\times 7=\overline{a_{22}a_1a_2a_3\cdots a_{21}}$，且$\overline{a_1a_2a_3\cdots a_{21}a_{22}}$之數碼和超過 100，請問$\overline{a_1a_2a_3\cdots a_{21}a_{22}}$之數碼和是多少？

【參考解法】

因等式左右兩側皆為 22 位數且乘數為 7，故知$a_1=1$、$a_{22}=7$、8 或 9。

(i) $a_{22}=7$：此時可得左式個位數為 9，即$a_{21}=9$；此時可得左式十位數為 3+4=7，即$a_{20}=7$；…，以此類推，可依序推得：$a_{19}=5$、$a_{18}=0$、$a_{17}=4$、$a_{16}=8$、$a_{15}=8$、$a_{14}=1$、$a_{13}=3$、$a_{12}=2$、$a_{11}=6$、$a_{10}=3$、$a_9=5$、$a_8=7$、$a_7=2$、$a_6=9$、$a_5=4$、$a_4=4$、$a_3=1$、$a_2=0$、$a_1=1$，即$\overline{a_1a_2a_3\cdots a_{21}a_{22}}=1{,}014{,}492{,}753{,}623{,}188{,}405{,}797$，此時數碼和為 96，故不合。

(ii) $a_{22}=8$：此時可得左式個位數為 6，即$a_{21}=6$；此時可得左式十位數為 2+5=7，即$a_{20}=7$；…，以此類推，可依序推得：$a_{19}=3$、$a_{18}=6$、$a_{17}=4$、$a_{16}=2$、$a_{15}=7$、$a_{14}=0$、$a_{13}=5$、$a_{12}=5$、$a_{11}=8$、$a_{10}=9$、$a_9=8$、$a_8=2$、$a_7=0$、$a_6=2$、$a_5=4$、$a_4=9$、$a_3=5$、$a_2=1$、$a_1=1$，即$\overline{a_1a_2a_3\cdots a_{21}a_{22}}=1{,}159{,}420{,}289{,}855{,}072{,}463{,}768$，此時數碼和為 102。

(iii) $a_{22}=9$：此時可得左式個位數為 3，即$a_{21}=3$；此時可得左式十位數為 1+6=7，即$a_{20}=7$；…，以此類推，可依序推得：$a_{19}=1$、$a_{18}=2$、$a_{17}=5$、$a_{16}=6$、$a_{15}=5$、$a_{14}=9$、$a_{13}=6$、$a_{12}=8$、$a_{11}=0$、$a_{10}=6$、$a_9=2$、$a_8=8$、$a_7=7$、$a_6=4$、$a_5=3$、$a_4=4$、$a_3=0$、$a_2=3$、$a_1=1$，即$\overline{a_1a_2a_3\cdots a_{21}a_{22}}=1{,}304{,}347{,}826{,}086{,}956{,}521{,}739$，此時數碼和為 99，故不合。

ANS：102

12. 給定 n 個數 1、3、3^2、3^3、…、3^n，從這 n 個數中每次取 1 個數，或者取幾個不同的數求和（每次每個數只能取一次），可以得到一個數，將這些數從小到大依次排列起來，它們是 1、3、4、9、10、12、…，請問第 100 個數是什麼？

【參考解法】

因所得之數列均為數個 3 的冪次方之和，且每一個 3 的冪次方有可選與可不選這 2 種可能，故先考慮二進制之下 100 的表示法，即 $100=(1100100)_2$，所以第 100 個數為$1\times 3^6+1\times 3^5+0\times 3^4+0\times 3^3+1\times 3^2+0\times 3+0\times 1=981$。

ANS：981

第二部分：計算證明，每題 20 分，共 60 分

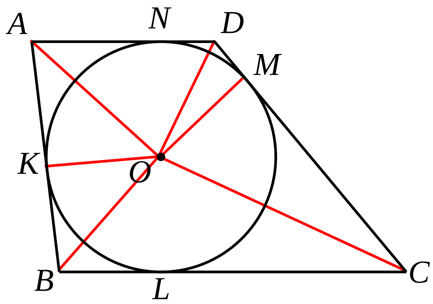
(注意：請依題號在空白處作答，須詳列過程及說明理由)

1. 能否將 0、1、2、⋯、9 排在一圓圈上，使得任兩個相鄰的數之差恰好是 3、4 或 5？若可，請舉一例；若否，請證明。

【參考解法】

可觀察出 0、1、2、8、9 這五個數必不能相鄰，即在這五個數之間必須插入其它五個數。可發現此時 7 無法置入，否則都違反題意，故滿足題意的排列方式必不存在。

2. 在梯形 $ABCD$ 中，$AD//BC$，它的內切圓分別切 AB、BC、CD、DA 於點 K、L、M、N。試證明 $AK\times KB=CM\times MD$。



【參考解法】

令內切圓圓心為 O。連接 OM、OK、OD、OC、OB、OA。

因 M、K 為切點，故 $OM\perp CD$、$OK\perp AB$ 且

$\angle MCO=\frac{1}{2}\angle MCL$、$\angle MDO=\frac{1}{2}\angle MDN$、$\angle KAO=\frac{1}{2}\angle KAN$、

$\angle KBO=\frac{1}{2}\angle KBL$；

因 $AD//BC$，故 $\angle MCL+\angle MDN=180°$、$\angle KAN+\angle KBL=180°$，即 $\angle MCO+\angle MDO=90°$、$\angle KAO+\angle KBO=90°$，所以$\triangle COD$、$\triangle AOB$ 為直角三角形。故可知$\triangle MCO\sim\triangle MOD$、$\triangle KBO\sim\triangle KOA$，所以 $\frac{CM}{OM}=\frac{OM}{MD}$、

$\frac{KB}{OK}=\frac{OK}{AK}$，即 $CM\times MD=OM\times OM$、$AK\times KB=OK\times OK$。因 OM、OK 皆為圓 O 的半徑，故可得 $AK\times KB=CM\times MD$。

3. A、B、C、D、E 為小於 1000 的質數，它們的各位數碼恰好包含 0～9 各一個，且 $A+B+C-D=E$，其中 $E>A>B>C>D$。試求 A、B、C、D、E。

【參考解法】

由等式的奇偶性可知 A、B、C、D、E 中至少有一數是偶數，即 $D=2$；此時 A、B、C、E 的個位數為 1、3、5、7、9 中的四個。

(i) 若 A、B、C、E 的個位數沒有 5，則 A、B、C、E 的個位數即為 1、3、7、9，其中僅 E 的個位數為 9 時滿足題意。因 A、B、C、E 共有九個數碼，若因 A、B、C 都為二位數，E 為三位數，則 $E<300$，E 必須是 209，但數碼 2 已經用過，故此情況不可能。因 A、B、C、E 至多為三位數且現仍有 0、4、5、6、8 共 5 個數碼未確定，故可令 $A=\overline{abc}$、$B=\overline{de}$、$E=\overline{fg9}$，而 $C=3$ 或 7。此時可以得知 0 為 b 或 g。

(1) 若 $b=0$，則 $g=d$，矛盾。

(2) 若 $g=0$，則 $b+d=10$，$f=a+1$，此時 a、b、d、f、為 4、5、6、8，b、d 只能為 4、6，a、f 只能為 5、8，矛盾。

(ii) 若 A、B、C、E 的個位數有 5，則可得 $C=5$。此時可知 $A+B+3=E$。因 A、B、E 至多為三位數且現仍有 8 個數碼未確定，故可令 $A=\overline{abc}$、$B=\overline{de}$、$E=\overline{fgh}$。

因此有 $c+e+3$ 的個位數$=h$ 且 c、e、h 為 1、3、7、9 中的三個。可算出其中僅 c、e 為 1 或 3 而 $h=7$；c、e 為 1 或 9 而 $h=3$ 滿足；

其中 a、d、f 不為 0，0 只可能為 b 或 g。

若 $b=0$，則 $d=g$ 或 $g=d+1$，矛盾，故 $g=0$ 且 $b+d=10$ 或 $b+d+1=10$。

(1) 當 $b+d+1=10$，此時 a、b、d、f、為 4、6、7、8，沒有合適的值滿足；

(2) 當 $b+d=10$，此時 a、b、d、f、為 4、6、8、9，b、d 只能為 4、6，由此可知 $a=8$、$f=9$。

整理以上資訊可得：

(1) $A=841$、$B=63$、$E=907$，其中 B 不為質數，故不合；

(2) $A=843$、$B=61$、$E=907$，其中 A 不為質數，故不合；

(3) $A=861$、$B=43$、$E=907$，其中 A 不為質數，故不合；

(4) $A=863$、$B=41$、$E=907$。

因此 $A=863$、$B=41$、$C=5$、$D=2$、$E=907$。

ANS：$A=863$、$B=41$、$C=5$、$D=2$、$E=907$