

2009 年青少年數學國際城市邀請賽
參賽代表遴選複賽
個人數學競賽試題

編號: _____ 校名: _____ 國中 姓名: _____

作答時間: 二小時

第一部分: 填充題, 每小題 5 分, 共 60 分

(注意: 請將答案直接填入各題預留空白處, 不須列出計算過程)

1. 請找出一個正整數分別加上 100 與 164 後所得之數都是完全平方數。

答: _____

2. 小莉買了一些糖果分給她的兄弟姊妹。她先給哥哥 1 顆糖果後再給哥哥其餘的 $\frac{1}{4}$, 接著給姊姊 1 顆糖果後再給姊姊其餘的 $\frac{1}{4}$, 再來給弟弟 1 顆糖果後再給弟弟其餘的 $\frac{1}{4}$, 最後給妹妹 1 顆糖果後再給妹妹其餘的 $\frac{1}{4}$ 。小莉注意到她的哥哥與弟弟一共比她的姊姊與妹妹多得了 100 顆糖果。請問小莉原來買了多少顆糖果?

答: _____ 顆

3. 已知 P_1, P_2, \dots, P_n 為 n 個相異的質數, 在下列的算式中任意加上括號:

$$P_1 \div P_2 \div \dots \div P_n$$

請問至多可以得到多少個不同的值?

答: _____ 個

4. 有兩個質數 p, q 使得 $p^q - q^p = 130783$ 。請問 $p+q$ 的最大值是什麼?

答: _____

5. 商店售有一種水果糖, 它分別有 15 顆、18 顆與 20 顆三種包裝。小王欲恰好購買 x 顆水果糖, 請問店員無法準確給予水果糖的最大 x 值是什麼?

答: _____

6. 已知 x, y 為實數, 且 $x+y \geq 0$, 試求 $x^5 + y^5 - x^4y - xy^4 + x^2 + 6x + 2009$ 之極小值。

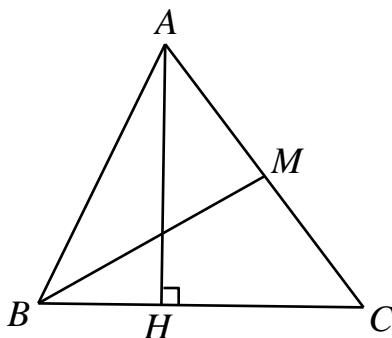
答: _____

(翻面繼續作答)

7. 有一個五位數 \overline{abcde} 是由五個連續的數碼組成(但不一定要依此順序)，已知它的頭兩位數 \overline{ab} 乘以中間的數 c 正好等於末兩位數 \overline{de} (即 $\overline{ab} \times c = \overline{de}$)。請問這個五位數是什麼？

答：_____。

8. 如圖的銳角三角形 ABC 中，其中的一個高 AH 之長度正好等於中線 BM 。試求 $\angle MBC$ 之角度。



答：_____。

9. 有一隊行進中的部隊全長共 40 公里，有一位傳令兵從隊伍最尾端送一份密令到隊伍最前端然後再回到隊伍最尾端，此時此部隊正好已向前推進 40 公里。請問這位傳令兵來回共走了多少公里？

答：_____公里。

10. 校長盃足球賽共有 8 支隊伍參賽，每支隊伍都必須與其他隊伍各恰比賽一場，勝隊可得 2 分、負隊得 0 分、平手則各得 1 分。比賽結束後發現所有的參賽隊伍的積分均不相同，且第二名的積分等於最後四名積分的總和。請問第二名的積分是多少？

答：_____分。

11. A、B、C 三人同時出發從甲地到乙地，甲、乙兩地距離 20 公里，A、B、C 步行之時速分別為 4、5、3 公里。現有一輛自行車，他們可以將自行車停在中途上輪流騎(不可載人)，A、B、C 騎車之時速分別為 10、8、12 公里。請問從他們出發到三人全部抵達至少需要多少小時？

答：_____小時。

12. 有一個正 n 邊形，其最長的對角線與最短的對角線之差恰好等於它的邊長。請找出滿足上述條件的最大正整數 n 。

答：_____。

第二部分：計算證明，每題 20 分,共 60 分

(注意：請在本試卷正反面空白處依題號作答，須詳列計算過程及說明理由)

1. 在平面上有 101 個相異的點，任兩點之間的距離都不相同，由每個點都發出一條射線到距離最近的點上，試證至少有一個點沒有射線射向此點。

2. 已知 2^{2009} 是一個 605 位數，將這個數的最左邊的 500 個數碼全部刪去，得到一個新數 n 。試證這個新數 n 可被 2^{105} 整除。

3. 由 $\triangle ABC$ 之 AB 、 AC 邊向外作 $\triangle ABR$ 、 $\triangle ACQ$ 使得 $\angle ARB = \angle AQC = 90^\circ$ 、 $\angle ABR = \angle ACQ = 50^\circ$ 。已知 D 為 BC 邊之中點，試求 $\angle RDQ$ 。

