2009 年青少年數學國際城市邀請賽

參賽代表遴選複賽

個人數學競賽試題

作答時間: 二 小 時

第一部分：填充題，每小題 5 分，共 60 分

(注意：請將答案直接填入各題預留空白處，不須列出計算過程)

1. 請找出一個正整數分別加上 100 與 164 後所得之數都是完全平方數。

【參考解法】

令該數分別加上 100 與 164 後所得之數依序為 x^2、y^2，其中 $x>10$、$y>12$。

由此可知 $y^2-x^2=164-100=64$，即 $(y+x)(y-x)=2^6$。

(i) $y+x=2^6=64$、$y-x=1$：由奇偶性可判斷出此時 x、y 不為整數，不合；

(ii) $y+x=2^5=32$、$y-x=2$：故 $y=17$、$x=15$，即該正整數為 125；

(iii) $y+x=2^4=16$、$y-x=2^2=4$：故 $y=10$、$x=6$，不合；

(iv) $y+x=2^3=8$、$y-x=2^3=8$：故 $y=8$、$x=0$，不合；

故所求為 125。

ANS:125

2. 小莉買了一些糖果分給她的兄弟姊妹。她先給哥哥 1 顆糖果後再給哥哥其餘的 $\frac{1}{4}$，接著給姊姊 1 顆糖果後再給姊姊其餘的 $\frac{1}{4}$，再來給弟弟 1 顆糖果後再給弟弟其餘的 $\frac{1}{4}$，最後給妹妹 1 顆糖果後再給妹妹其餘的 $\frac{1}{4}$。小莉注意到她的哥哥與弟弟一共比她的姊姊與妹妹多得了 100 顆糖果。請問小莉原來買了多少顆糖果？

【參考解法】

設小莉原來買了 a 顆糖果，則可知

哥哥分到 $1+\frac{1}{4}(a-1)=\frac{1}{4}a+\frac{3}{4}$，此時剩下 $\frac{3}{4}(a-1)=\frac{3}{4}a-\frac{3}{4}$、

姊姊分到 $1+\frac{1}{4}(\frac{3}{4}a-\frac{3}{4}-1)=\frac{3}{16}a+\frac{9}{16}$，此時剩下 $\frac{3}{4}(\frac{3}{4}a-\frac{3}{4}-1)=\frac{9}{16}a-\frac{21}{16}$、

弟弟分到 $1+\frac{1}{4}(\frac{9}{16}a-\frac{21}{16}-1)=\frac{9}{64}a+\frac{27}{64}$，此時剩下 $\frac{3}{4}(\frac{9}{16}a-\frac{21}{16}-1)=\frac{27}{64}a-\frac{111}{64}$、

妹妹分到 $1+\frac{1}{4}(\frac{27}{64}a-\frac{111}{64}-1)=\frac{27}{256}a+\frac{81}{256}$。

故知

$$\frac{1}{4}a+\frac{3}{4}+\frac{9}{64}a+\frac{27}{64}=\frac{3}{16}a+\frac{9}{16}+\frac{27}{256}a+\frac{81}{256}+100$$

$$64a+192+36a+108=48a+144+27a+81+25600$$

$$25a=25525$$

$$a=1021$$

ANS:1021 顆

3. 已知 P_1、P_2、⋯、P_n 為 n 個相異的質數，在下列的算式中任意加上括號：

$$P_1 \div P_2 \div \cdots \div P_n$$

請問至多可以得到多少個不同的值？

【參考解法】

將該式化為分數型態，則可看出無論如何加上括號，P_1 恆位於分子而 P_2 恆位於分母，而其餘的質數都有可能位於分子或分母，故共可得 2^{n-2} 個不同的取值。

ANS：2^{n-2}

4. 有兩個質數 p、q 使得 $p^q-q^p=130783$。請問 $p+q$ 的最大值是什麼？

【參考解法】

若 p、q 都是奇數，則 p^q-q^p 為偶數，不合。故 p、q 其中一數為偶質數 2。

(i) 若 $q=2$，則有 $p^2-2^p=130783>0$，即 $p\le 4$，故 $p=3$，但此時 $p^q-q^p=3^2-2^3=1$，矛盾，故不合。

(ii) 若 $p=2$，則有 $2^q-q^2=130783$，故可知 $2^q>130783$，即 $q>16$。因 q 為奇質數，故先計算 $q=17$ 後得 $2^{17}-17^2=130783$，此數即為一解。

觀察數列 $\{2^q-q^2 \mid q\in N, q\ge 17\}$，則由 $2^{q+1}-(q+1)^2-2^q+q^2=2^q-2q-1>0$ 可知該數列為一遞增數列，因此上述所求之解為唯一解。

故知 $p+q=19$。

ANS: 19

5. 商店售有一種水果糖，它分別有 15 顆、18 顆與 20 顆三種包裝。小王欲恰好購買 x 顆水果糖，請問店員無法準確給予水果糖的最大 x 值是什麼？

【參考解法】

先考慮僅 15 顆、18 顆兩種包裝的情況。

則這兩種包裝可給予的值為 $15x+18y=3(5x+6y)$ 的形式，故此時先考慮 $5x+6y$ 的狀況。可觀察出 $5x+6y$ 可表示的值為 5、6、10=5+5、11=5+6、12=6+6、15=5+5+5、16=5+5+6、17=5+6+6、18=6+6+6、20=5+5+5+5、⋯。

可知每當 1 個 5 換成 1 個 6，值便增加 1，而 6+6+6+6=24 之後接續的值為 25=5+5+5+5+5，故 20 以後的整數皆可被 $5x+6y$ 所表示出來，即 15、18、30、33、36、45、48、51、54 與 60 以後 3 的倍數皆可被 $15x+18y$ 表示。

接著考慮加入 20 顆的包裝。因 $20\equiv 2 \pmod 3$、$20\times 2=40\equiv 1 \pmod 3$，因此其餘大於 60+40=100 且不可被 $15x+18y$ 所表示的數，可利用 $15x+18y+20$ 或 $15x+18y+20\times 2$ 表示，即 100 以後的糖果數皆可用這三種包裝給出。

99 顆即為大於 60 之 3 的倍數，故可給出；98=78+20，其中 78 為大於 60 之 3 的倍數，故可給出；97=57+40，但 57 不是可被 15x+18y 所表示出之 3 的倍數，故 97 顆無法利用這三種包裝準確給出。

ANS：97

6. 已知 x、y 為實數，且 $x+y\ge 0$，試求 $x^5+y^5-x^4y-xy^4+x^2+6x+2009$ 之極小值。

【參考解法】

$$\begin{aligned}
&x^5+y^5-x^4y-xy^4+x^2+6x+2009\\
&=x^4(x-y)+y^4(y-x)+x^2+6x+9+2000\\
&=(x^4-y^4)(x-y)+(x+3)^2+2000\\
&=(x^2+y^2)(x+y)(x-y)^2+(x+3)^2+2000
\end{aligned}$$

因 $x^2+y^2\ge 0$、$x+y\ge 0$、$(x-y)^2\ge 0$、$(x+3)^2\ge 0$，

故 $(x^2+y^2)(x+y)(x-y)^2+(x+3)^2+2000\ge 0+0+2000=2000$，且極小值發生在 x=－3、y=3。

ANS：2000

7. 有一個五位數 $\overline{abcde}$ 是由五個連續的數碼組成(但不一定要依此順序)，已知它的頭兩位數 $\overline{ab}$ 乘以中間的數 c 正好等於末兩位數 $\overline{de}$ (即 $\overline{ab}\times c=\overline{de}$)。請問這個五位數是什麼？

【參考解法】

(i) 若這五個連續的數碼沒有 5，則必為 0、1、2、3、4 這五個數碼。此時由 $\overline{abcde}$ 是五位數知 0 不可為 a、由 10=2×5 可判斷出 0 不可為 e、由 $\overline{abcde}$ 的數碼均不相同可判斷出 0 不可為 b、c，即 d=0，但 $\overline{de}$ 為兩位數，故矛盾；

(ii) 若這五個連續的數碼有 5，則必沒有 0 這個數碼。此時由 $\overline{abcde}$ 的數碼均不相同且沒有 0 這個數碼可判斷出 5 不可為 b、c、e，即 a=5 或 d=5。若 a=5，則因 $\overline{de}$ 為二位數可判斷出 c=1，即 $\overline{de}=\overline{ab}$，矛盾，也因此得知 d=5，再由 $c\ne 1$ 知 $\overline{ab}$<30，故 a=1 或 2。

(1) a=1，則有 $\overline{1b}\times c=\overline{5e}$，且 b、c、e 三個個位數為 2、3、4，此時僅 e=2、b 與 c 為 3、4 可能滿足等式，代入後即知 b=3、c=4 且 $\overline{abcde}$=13452。

(2) a=2，則有 $\overline{2b}\times c=\overline{5e}$，此時可判斷出 c 為 1 或 2，但 $c\ne 1$ 且 a=2，故此情形不存在。

ANS：13452

8. 如圖的銳角三角形 ABC 中，其中的一個高 AH 之長度正好等於中線 BM。試求 $\angle MBC$ 之角度。

【參考解法】

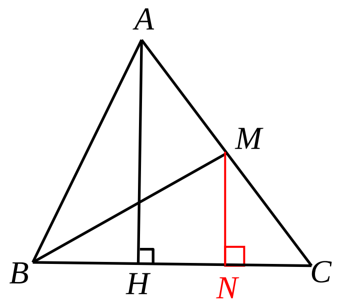
由 M 往 BC 作垂線，令垂足為 N。則可知 $MN//AH$。

因 M 為 AC 中點，故 N 為 CH 中點且

$$MN=\frac{1}{2}AH=\frac{1}{2}BM$$

又因△BMN 為以角 N 為直角的直角三角形，

故可知∠$MBC=30^\circ$



ANS：30°

9. 有一隊行進中的部隊全長共 40 公里，有一位傳令兵從隊伍最尾端送一份密令到隊伍最前端然後再回到隊伍最尾端，此時此部隊正好已向前推進 40 公里。請問這位傳令兵來回共走了多少公里？

【參考解法】

令傳令兵從出發到回到部隊最尾端所花費的時間為 1，共走了 x 公里，則傳令兵的速度為 x、部隊速度為 40，可由題意知 x>40。

傳令兵由部隊最尾端行走至最前端所花費時間為 $\dfrac{40}{x-40}$ 、再由部隊最前端行走至最尾端所花費時間為 $\dfrac{40}{x+40}$ ，故可得 $\dfrac{40}{x-40}+\dfrac{40}{x+40}=1$，即

$$40(x+40)+40(x-40)=(x+40)(x-40)$$

$$80x=x^2-40^2$$

$$x=40(1+\sqrt{2}) \quad (\because x>40)$$

ANS：$40(1+\sqrt{2})$ 公里

10. 校長盃足球賽共有 8 支隊伍參賽，每支隊伍都必須與其他隊伍各恰比賽一場，勝隊可得 2 分、負隊得 0 分、平手則各得 1 分。比賽結束後發現所有的參賽隊伍的積分均不相同，且第二名的積分等於最後四名積分的總和。請問第二名的積分是多少？

【參考解法】

因最後四名間共有 6 場比賽，故最後四名的積分和至少為 6×2=12 分，即第二名至少為 12 分。

因第一名與第二名的積分不同且一隊的積分最多為 14 分，故第二名球隊的積分不可能是 14 分。

若第二名球隊的積分為 13 分，則第二名必有一場比賽平手，其他的場次全勝。若是與非第一名的球隊踢成平手，則第二名的球隊必定擊敗第一名的球隊，也因此第一名的球隊至多為 12 分，不合；若是與第一名的球隊踢成平手，則第一名與第二名兩隊同分，不合。

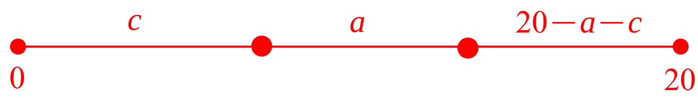
故第二名的球隊之積分為 12 分。

ANS：12 分

11. A、B、C 三人同時出發從甲地到乙地，甲、乙兩地距離 20 公里，A、B、C 步行之時速分別為 4、5、3 公里。現有一輛自行車，他們可以將自行車停在半途上輪流騎(不可載人)，A、B、C 騎車之時速分別為 10、8、12 公里。請問從他們出發到三人全部抵達至少需要多少小時？

【參考解法】

要所需的時間最少，即為要求同時到達，故可判斷出應由步行最慢的 C 先騎車、途中放下自行車由步行速度次之的 A 騎車、途中 A 再放下自行車接著由 B 騎至乙地。可令甲地為數線上的 0 而乙地為數線上的 20(該數線每單位為 1 公里)，C 騎至 c 後由 A 從 c 騎至 c+a，最後 B 再騎到 20，即 C 騎 c 公里、A 騎 a 公里、B 騎 20－a－c 公里，如下圖所示：



因同時抵達，故三人所花時間相同，可得等式

$$\frac{c}{12}+\frac{20-c}{3}=\frac{a}{10}+\frac{20-a}{4}=\frac{20-a-c}{8}+\frac{a+c}{5}$$

即

$$\begin{cases}5c+400-20c=6a+300-15a\\4a+200-10a=100-5a-5c+8a+8c\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}9a=15c-100\\9a=100-3c\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{200}{27}\\c=\dfrac{100}{9}\end{cases}$$

因此所花時間為

$$\frac{1}{12}\times\frac{100}{9}+\frac{1}{3}\times(20-\frac{100}{9})=\frac{25}{27}+\frac{80}{27}=\frac{105}{27}=\frac{35}{9}=3\frac{8}{9}\text{ 小時}$$

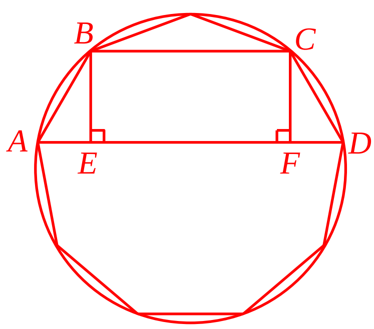
ANS：$3\frac{8}{9}$ 小時

12. 有一個正 n 邊形，其最長的對角線與最短的對角線之差恰好等於它的邊長。請找出滿足上述條件的最大正整數 n。

【參考解法】

因正 n 邊形都可內接於圓內，故可令 a_n 、D_n 、d_n 依序分別為內接於單位圓之正 n 邊形之邊長、最長的對角線長度及最短的對角線之長度，且可判斷出 $a_n>a_{n+1}$ 、$d_{n+1}<d_n$ 。

當 n=9 時，此時可觀察右圖的圓內接正九邊形：其中 E、F 為分別從 B、C 兩點作 AD 的垂線與 AD 的交點。可知正九邊形的每個內角為 140°、AD 為最長的對角線之一、BC 為最短的對角線之一。從圓周角的概念知 $\angle BAE$=$\angle CDF$=$\frac{3}{7}\times 140^\circ=60^\circ$，故 AE=FD=$\frac{1}{2}a_9$ 。

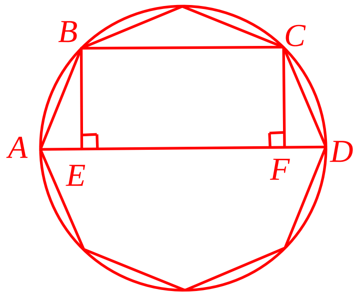


而 $D_9-d_9=AD-BC=AE+FD=\frac{1}{2}a_9+\frac{1}{2}a_9=a_9$ ，故 n=9 為其中一解。

當 n>9 時，我們已知 $a_9>a_n$ 、$d_n<d_9$ 、$D_9<D_n$ 。

故 $D_n-d_n>D_9-d_9=a_9>a_n$ 。

當 n=4 或 5 時，$D_n - d_n = 0$。
當 n=6 或 7 時，由三角不等式可得 $D_n - d_n < a_n$。
當 n=8 時，此時可觀察右圖的圓內接正八邊形：



其中 E、F 為分別從 B、C 兩點作 AD 的垂線與 AD 的交點。可知正八邊形的每個內角為 135°、AD 為最長的對角線之一、BC 為最短的對角線之一。從圓周角的概念知 $\angle BAE=\angle CDF=\frac{3}{6}\times 135°=67.5°>60°$，故 $AE=FD<\frac{1}{2}a_8$。

而 $D_8 - d_8 = AD - BC = AE + FC < \frac{1}{2}a_8 + \frac{1}{2}a_8 = a_8$，可知 n=8 不是其中一解。

故僅 n=9 成立。

ANS：9

第二部分：計算證明，每題 20 分,共 60 分

(注意：請在本試卷正反面空白處依題號作答，須詳列計算過程及說明理由)

1. 在平面上有 101 個相異的點，任兩點之間的距離都不相同，由每個點都發出一條射線到距離最近的點上，試證至少有一個點沒有射線射向此點。

【參考解法】

因這 101 的相異點之間任兩點的距離都不相同，所以一定可以找出距離最短的兩點，此時這兩點之間必定是互相射出射線；接著考慮其餘的 99 點，仍因任兩點的距離都不相同，所以一定可以再找出這 99 點中距離最短的兩點，且這兩點之間必定是互相射出射線；依此法繼續下去，每一次皆減少兩點，故最後必會剩下一點沒有射線設向此點。

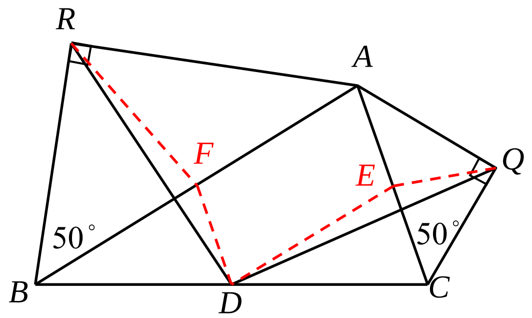
2. 已知 2^{2009} 是一個 605 位數，將這個數的最左邊的 500 個數碼全部刪去，得到一個新數 n。試證這個新數 n 可被 2^{105} 整除。

【參考解法】

因已知 2^{2009} 是一個 605 位數，故可知存在 A 使得 $2^{2009} = A\times 10^{105} + n$，其中 A 即為最左邊的 500 個數碼。因 2^{105} 同時為 2^{2009} 與 10^{105} 的因數，故 2^{105} 必為 n 的因數，即 n 可被 2^{105} 整除。

3. 由△ABC 之 AB、AC 邊向外作△ABR、△ACQ 使得 $\angle ARB=\angle AQC=90^\circ$、$\angle ABR=\angle ACQ=50^\circ$。已知 D 為 BC 邊之中點，試求 $\angle RDQ$。

【參考解法】



令 E、F 分別為 AC、AB 的中點。連接 ED、EQ、FD、FR。

因△ABR 為直角三角形，故知

$FR = AF = BF = \frac{1}{2}AB$

且 $\angle BFR=180^\circ - \angle FBR - \angle FRB$

$=180^\circ-50^\circ-50^\circ=80^\circ$，

同理，因$\triangle ACQ$為直角三角形，故知 $EQ=AE=CE=\frac{1}{2}AC$

且$\angle CEQ=180^\circ-\angle ECQ-\angle EQC=180^\circ-50^\circ-50^\circ=80^\circ$。

故$\angle BFR=80^\circ=\angle CEQ$。

因 DE、DF 為$\triangle ABC$之兩邊的中點連線，故知

(i) $DE//AB$、$DF//AC$，也由此知$\angle DEC=\angle BAC=\angle BFD$。

(ii) $DE=\frac{1}{2}AB=FR$ 、 $DF=\frac{1}{2}AC=EQ$

而$\angle RFD=\angle BFR+\angle BFD=\angle CEQ+\angle DEC=\angle DEQ$，

所以知$\triangle RFD\cong\triangle DEQ$。

$$\begin{aligned}\angle RDQ&=\angle FDE+\angle FDR+\angle EDQ\\&=\angle FDE+\angle EQD+\angle EDQ\\&=\angle FDE+(180^\circ-\angle DEQ)\\&=\angle BAC+(180^\circ-\angle DEC-\angle CEQ)\\&=\angle BAC+180^\circ-\angle BAC-80^\circ\\&=100^\circ\end{aligned}$$

ANS：100°