2009年青少年數學國際城市邀請賽

參賽代表遴選複賽

個人數學競賽試題

編號：______________ 校名：______________國中 姓名：______________________

作答時間: 二 小 時

第一部分：填充題，每小題5分，共60分

(注意：請將答案直接填入各題預留空白處，不須列出計算過程)

1. 計算$\left(\frac{1}{1000}+\frac{2}{1000}+...+\frac{999}{1000}\right)+\left(\frac{1}{1001}+\frac{2}{1001}+...+\frac{1000}{1001}\right)+\left(\frac{1}{1002}+\frac{2}{1002}+...+\frac{1001}{1002}\right)+\cdots$
$+\left(\frac{1}{2009}+\frac{2}{2009}+\cdots+\frac{2008}{2009}\right)=$ ___________。

2. $(3^{2008}+4^{2009}+7^{2010})$被5除之餘數為___________。

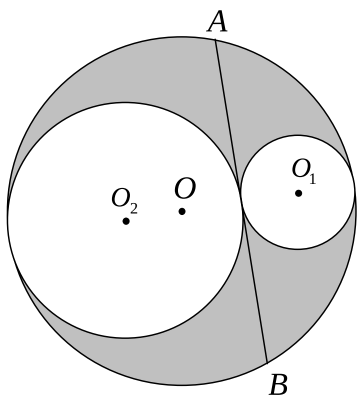
3. 設n為正整數，若$a^{2n}=5$，則$2a^{6n}-4$的值為___________。

4. 設a、b、c為正實數，且$a+b+c=7$及$\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}=\frac{10}{7}$。則
$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}$之值為___________。

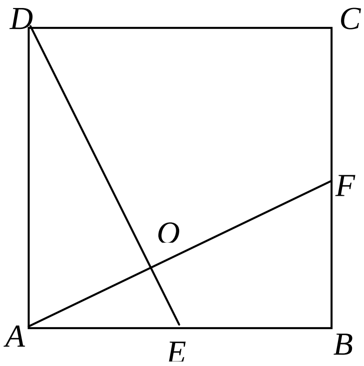
5. 從1開始依次將自然數寫在一條很長的紙帶上，123456789101112131415…，然後依每三個數碼的長度將紙帶剪成小紙片，例如123, 456, 789, 101, 213, 141, …。第一張小紙片出現的數碼是123，則下一張紙片上的數碼為123的是第___________張。

6. 給定$f(5)=10$且對所有n，$f(n+3)=\frac{f(n)-1}{f(n)+1}$。則$f(2009)$的值是___________。

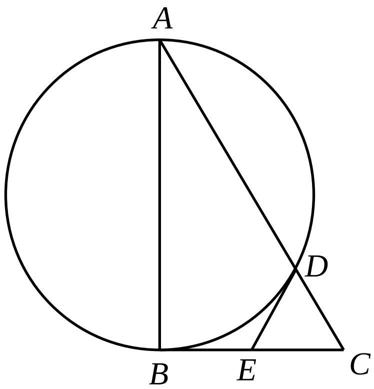
7. 半徑都不相等的三圓兩兩互相相切，如圖所示。若兩小圓的內公切線在大圓內部的部分AB＝12cm，則圖中陰影部分的面積為 ___________cm^2。



8. 正方形 $ABCD$ 中，E、F 分別為 AB、BC 的中點，AF 與 DE 相交於點 O，如下圖所示，則 $\dfrac{AO}{DO}$ = ____________ 。

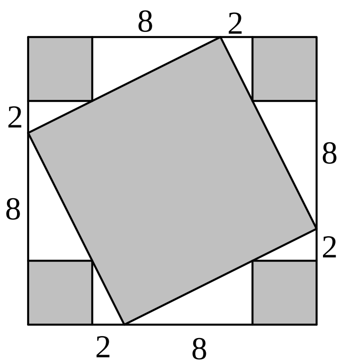


9. 三角形 ABC 為一直角三角形，$\angle ABC = 90^\circ$， AB 長為 10，以 AB 為直徑畫一圓交斜邊 AC 於 D 點，線段 AD 長為 8。過 D 點作圓的切線交 BC 邊於 E 點，如下圖所示，則線段 EC 的長= ____________ 。



10. 若 a, b, c, d 為四個相異的有理數，且滿足 $(a-c)(a-d)=2$ 與 $(b-c)(b-d)=2$ ，則 $(a-c)(b-c)=$ ____________ 。

11. 在一個大正方形內部有五個塗陰影的小正方形，如下圖所示，其部份線段長度已經標記在圖上，則五個塗陰影正方形的面積之總和＝____________。



12. 滿足 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{2009}$ 的正整數數對 (x, y) 共有____________組。

第二部分：計算證明，每題 20 分,共 60 分

(注意：請在本試卷正反面空白處依題號作答，須詳列計算過程及說明理由)

1. 設 $P = 13x + 52y$ 為完全立方數， 且 P 為不超過 2400 的正整數，請問符合以上條件的正整數解$\left(x, y\right)$共有幾組？

2. 已知 n 為整數，若代數式 $9n^2 + 23n - 2$ 的值恰可以分解為兩個連續正偶數的乘積，試求所有可能的 n 值。

3. 已知 O_1 、 O_2 、 O_3 為三個半徑不同且互不相交的圓， A_1A_2 、 B_1B_2 、 C_1C_2 分別為其直徑，點 P 為平面上任意一點，如圖所示。

若 $PA_1 + PB_1 + PC_1 < PO_1 + PO_2 + PO_3$ ，試證明 $PA_2 + PB_2 + PC_2 > PO_1 + PO_2 + PO_3$ 。