2009 年青少年數學國際城市邀請賽

參賽代表遴選複賽

個人數學競賽試題

作答時間: 二 小 時

第一部分：填充題，每小題 5 分，共 60 分

(注意：請將答案直接填入各題預留空白處，不須列出計算過程)

1. 計算$\left(\frac{1}{1000}+\frac{2}{1000}+\ldots+\frac{999}{1000}\right)+\left(\frac{1}{1001}+\frac{2}{1001}+\ldots+\frac{1000}{1001}\right)+\left(\frac{1}{1002}+\frac{2}{1002}+\ldots+\frac{1001}{1002}\right)+\cdots$
$+\left(\frac{1}{2009}+\frac{2}{2009}+\cdots+\frac{2008}{2009}\right)=$____________。

$$\left(\frac{1}{1000}+\frac{2}{1000}+\ldots+\frac{999}{1000}\right)+\left(\frac{1}{1001}+\frac{2}{1001}+\ldots+\frac{1000}{1001}\right)+\left(\frac{1}{1002}+\frac{2}{1002}+\ldots+\frac{1001}{1002}\right)+\cdots$$
$$+\left(\frac{1}{2009}+\frac{2}{2009}+\cdots+\frac{2008}{2009}\right)=\frac{1}{2}(999+1000+1001+\cdots+2008)=759267\frac{1}{2}$$

ANS： $759267\frac{1}{2}$

2. $(3^{2008}+4^{2009}+7^{2010})$被 5 除之餘數為____________。

$3^{2008}+4^{2009}+7^{2010}\equiv(-2)^{2008}+(-1)^{2009}+2^{2010}\equiv 2^{4\times 502}-1+2^{4\times 502+2}\equiv 1-1+2^2\equiv 4 \pmod 5$

ANS：4

3. 設 n 為正整數，若 $a^{2n}=5$ ，則 $2a^{6n}-4$ 的值為____________。

$2a^{6n}-4=2(a^{2n})^3-4=250-4=246$

ANS：246

4. 設 a、b、c 為正實數，且 $a+b+c=7$ 及 $\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}=\frac{10}{7}$ 。則

$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}$ 之值為____________。

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}=\frac{7-(b+c)}{b+c}+\frac{7-(c+a)}{c+a}+\frac{7-(a+b)}{a+b}=\frac{7}{b+c}+\frac{7}{c+a}+\frac{7}{a+b}-3=10-3=7$$

ANS：7

5. 從 1 開始依次將自然數寫在一條很長的紙帶上，123456789101112131415…，然後依每三個數碼的長度將紙帶剪成小紙片，例如 123, 456, 789, 101, 213, 141, …。第一張小紙片出現的數碼是 123，則下一張紙片上的數碼為 123 的是第____________張。

可觀察出下一張紙片上的數碼為 123 不是由二位數組成。因 1 到 122 共有 9+90×2+23×3 =3×86 個數碼且這是 3 的倍數，故下一張紙片上的數碼為 123 恰是由數 123 組成，為第 87 張。

ANS：87

6. 給定 $f(5)=10$ 且對所有 n， $f(n+3)=\frac{f(n)-1}{f(n)+1}$ 。則 $f(2009)$ 的值是____________。

可觀察出：$f(8)=\dfrac{f(5)-1}{f(5)+1}=\dfrac{10-1}{10+1}=\dfrac{9}{11}$、$f(11)=\dfrac{f(8)-1}{f(8)+1}=\dfrac{\frac{9}{11}-1}{\frac{9}{11}+1}=-\dfrac{1}{10}$、

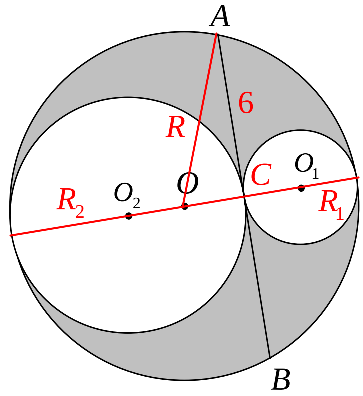
$f(14)=\dfrac{f(11)-1}{f(11)+1}=\dfrac{-\frac{1}{10}-1}{-\frac{1}{10}+1}=-\dfrac{11}{9}$、$f(17)=\dfrac{f(14)-1}{f(14)+1}=\dfrac{-\frac{11}{9}-1}{-\frac{11}{9}+1}=10$，

即從 $f(5)$ 開始，$f(n+3)$ 是一個循環數列且知 $f(5)=f(5+12k)$。

因 2009=12×167+5，故 $f(2009)=f(5)=10$。

ANS：10

7. 半徑都不相等的三圓兩兩互相相切，如圖所示。若兩小圓的內公切線在大圓內部的部分 AB＝12cm，則圖中陰影部分的面積為 ____________ cm^2。



因三圓兩兩互相相切，故三圓圓心必共線。令 C 為圓 O_1 與 O_2 的切點，R、R_1、R_2 分別為圓 O、O_1、O_2 的半徑。可知

$OC\perp AB$、$AC=\dfrac{1}{2}AB=6$、$R=R_1+R_2$ 且

$OC=R-2R_1=R_2-R_1$。

因此所求之陰影部分的面積為

$\pi\left(R^2-R_1^2-R_2^2\right)=\pi\left[R^2-\left(R_1^2+R_2^2\right)\right]=2R_1R_2\pi$。

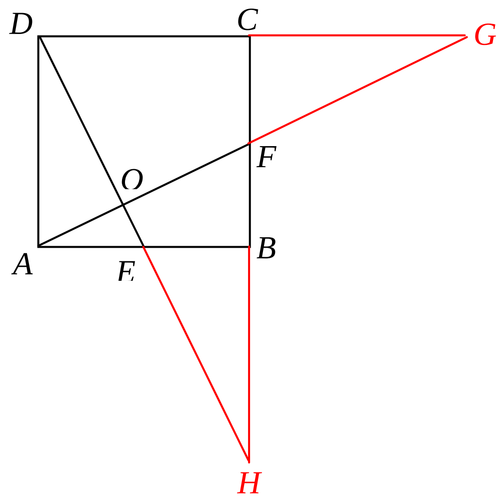
再由畢氏定理知 $AO^2=OC^2+AC^2$，即

$\left(R_1+R_2\right)^2=\left(R_2-R_1\right)^2+6^2$，故有 $4R_1R_2=36$，即 $2R_1R_2=18$。

因此所求之陰影部分的面積為 $18\pi\ \text{cm}^2$。

ANS：$18\pi\ \text{cm}^2$

8. 正方形 $ABCD$ 中，E、F 分別為 AB、BC 的中點，AF 與 DE 相交於點 O，如下圖所示，則 $\dfrac{AO}{DO}$ = ____________ 。



令正方形邊長為 2，則知 $AE=EB=BF=FC=1$ 且 $DE=AF$。延長 DE、CB，令其交點為 H、延長 AF、CD，令其交點為 G。

可知△ADE～△BEH、△ABF～△GCF，故 $BH=CG=2$、$EH=FG$ 且 $DH=AG$

(i) 可知△ADO～△FHO，故 $\dfrac{DO}{OH}=\dfrac{AD}{FH}=\dfrac{2}{3}$，

即 $DO=\dfrac{2}{5}DH$；

(ii) 可知△AEO～△GDO，故 $\dfrac{AO}{OG}=\dfrac{AE}{DG}=\dfrac{1}{4}$，

即 $AO=\dfrac{1}{5}AG=\dfrac{1}{5}DH$。

因此 $\dfrac{AO}{DO}=\dfrac{1}{2}$。

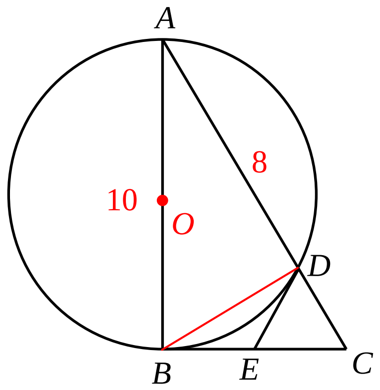
ANS：$\dfrac{1}{2}$

9. 三角形 ABC 為一直角三角形，$\angle ABC=90^\circ$，AB 長為 10，以 AB 為直徑畫一圓交斜邊 AC 於 D 點，線段 AD 長為 8。過 D 點作圓的切線交 BC 邊於 E 點，如下圖所示，則線段 EC 的長= ____________ 。

令 O 爲圓心，連接 BD。因直徑 AB=10 且 AD=8，$\angle ADB=90^{\circ}$，可知 BD=6。又$\triangle ADB\sim\triangle ABC$，可得知 $BC=\dfrac{15}{2}$ 。

因 DE 、BE 均爲圓 O 之切線，故$\angle EDB=\angle CAB=\angle EBD$；故 BE=DE 。再由$\angle EDB+\angle CDE=90^{\circ}=\angle DBE+\angle DCE$，知$\angle CDE=\angle DCE$，故由此可得 CE=DE。

故 $EC=BE=\dfrac{15}{4}$



ANS：$\dfrac{15}{4}$

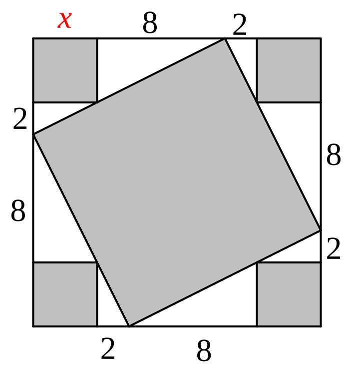
10. 若 a, b, c, d 爲四個相異的有理數，且滿足$(a-c)(a-d)=2$與$(b-c)(b-d)=2$，則$(a-c)(b-c)=$ ____________ 。

$$\begin{cases}(a-c)(a-d)=2\Rightarrow a^2-ac-ad+cd=2\\(b-c)(b-d)=2\Rightarrow b^2-bc-bd+cd=2\end{cases}\Rightarrow a^2-ac-ad=b^2-bc-bd$$

$\Rightarrow a^2-b^2=ac+ad-bc-bd\Rightarrow a+b=c+d\Rightarrow a-d=c-b$

所以$(a-c)(b-c)=-(a-c)(a-d)=-2$ ANS：-2

11. 在一個大正方形內部有五個塗陰影的小正方形，如下圖所示，其部份線段長度已經標記在圖上，則五個塗陰影正方形的面積之總和＝____________。



令四個角落上的正方形邊長爲 x，由相似三角形對應邊成比例可知$\dfrac{8}{8+x}=\dfrac{x}{2+x}$，故 x=4，因此四個角落上的四個小正方形之面積和爲 4×4×4=64。

因 x=4，故可知中央的正方形面積爲$(8+4)^2+(2+4)^2=180$ 。

因此五個塗陰影正方形的面積之總和爲 64+180=244。

ANS：244

12. 滿足$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{2009}$的正整數數對$(x,y)$共有____________組。

$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{2009}\Rightarrow\dfrac{x+y}{xy}=\dfrac{1}{2009}\Rightarrow xy-2009x-2009y=0$

$\Rightarrow(x-2009)(y-2009)=2009^2=7^4\times41^2$，因此$(x,y)$共有$(4+1)\times(2+1)=15$組解。

ANS：15

第二部分：計算證明，每題 20 分,共 60 分

(注意：請在本試卷正反面空白處依題號作答，須詳列計算過程及說明理由)

1. 設 $P=13x+52y$ 爲完全立方數，且 P 爲不超過 2400 的正整數，請問符合以上條件的正整數解(x,y)共有幾組？

因 $13x+52y=13(x+4y)$，故$P=13^3\times m^3$，其中 m 爲正整數。(給 5 分)因 $0<P\le2400$，故$m^3\le\dfrac{2400}{13^3}=1\dfrac{203}{2197}$，即 m=1、P=2197(給 5 分)，因此可知 $x+4y=169$。(給 5 分)所以(x,y)共有以下的 42 組解：(給 5 分)

x	165	161	157	153	...	5	1
y	1	2	3	4	...	41	42

ANS：42 組

2. 已知 n 為整數，若代數式 $9n^2+23n-2$ 的值恰可以分解為兩個連續正偶數的乘積，試求所有可能的 n 值。

令該式可分解為 $2k(2k+2)$，其中 k 為正整數，則有 $9n^2+23n-2=2k(2k+2)$，即 $9n^2+23n-(4k^2+4k+2)=0$ 有整數解(給 5 分)，因此判別式必須為完全平方數 P^2：

$$P^2=23^2+36(4k^2+4k+2)\Rightarrow P^2-[6(2k+1)]^2=23^2+36=565=5\times113$$

$$\Rightarrow[P+6(2k+1)][P-6(2k+1)]=565\times1=113\times5$$ (給 5 分)

可知：

$$\begin{cases}P+6(2k+1)=565\\P-6(2k+1)=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}P+12k=559\\P-12k=7\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}P=283\\k=23\end{cases}\Rightarrow n=\frac{-23\pm283}{2\times9}=-17\text{ 或 }\frac{130}{9}$$（不合）

(給 5 分)

或 $$\begin{cases}P+6(2k+1)=113\\P-6(2k+1)=5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}P+12k=107\\P-12k=11\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}P=59\\k=4\end{cases}\Rightarrow n=\frac{-23\pm59}{2\times9}=2\text{ 或 }-\frac{41}{9}$$（不合）

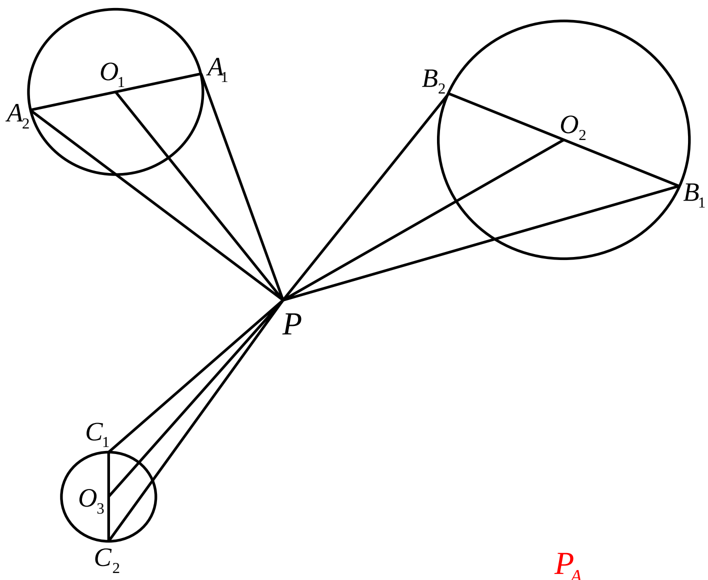
(給 5 分)

因此可能的 n 值為 -17 或 2。(只給答案沒有過程每組給 3 分)

ANS：-17 或 2

3. 已知 O_1、O_2、O_3 為三個半徑不同且互不相交的圓，A_1A_2、B_1B_2、C_1C_2 分別為其直徑，點 P 為平面上任意一點，如圖所示。

若 $PA_1+PB_1+PC_1<PO_1+PO_2+PO_3$，試證明 $PA_2+PB_2+PC_2>PO_1+PO_2+PO_3$。



先觀察圓 O_1 的情形。延長 PO_1 至 P_A 使得 $PO_1=P_AO_1$，則可知四邊形 $PA_1P_AA_2$ 為平行四邊形且 $PA_1=P_AA_2$。因 $PA_2+P_AA_2>PP_A=2PO_1$，可得 $PA_1+PA_2>2PO_1$。(給 10 分)同理，$PB_1+PB_2>2PO_2$、$PC_1+PC_2>2PO_3$，故得 $PA_1+PA_2+PB_1+PB_2+PC_1+PC_2>2PO_1+2PO_2+2PO_3$。(給 5 分)

因為已知 $PA_1+PB_1+PC_1<PO_1+PO_2+PO_3$，所以 $PA_2+PB_2+PC_2>PO_1+PO_2+PO_3$。(給 5 分)