「2009 年青少年數學國際城市邀請賽」

參賽代表遴選初選

個人數學競賽試題

編 號: ____________ 校 名: ____________ 國中　姓 名: ____________

作答時間: 二 小 時

第一部分：填充題，每小題 5 分，共 60 分

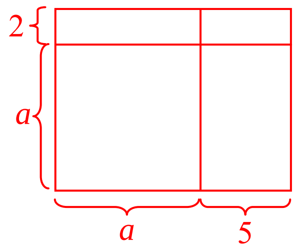
1. 從 1 到 2009，所有 7 的倍數之和為__________。

在 7 的倍數中，不超過 2009 的最大數為 2009，且 $2009=7\times 287$，故所有 7 的倍數之和為 $\frac{(7+2009)\times 287}{2}=289296$。

ANS：289296

2. 一個長方形，如果長減少 5 公分，寬減少 2 公分，那麼面積就減少 66 平方公分，這時剩下的部分恰好成為一個正方形。請問原來長方形的面積為__________平方公分。

令所形成之正方形邊長為 a，則知長方形之長為 $a+5$、寬為 $a+2$ 且減去的面積為 $2\times a+2\times 5+5\times a$，因此可得等式 $7a=56$，即 $a=8$ 而長方形之長為 13、寬為 10，故長方形的面積為 130 平方公分。



ANS：130 平方公分

3. 斐波那契數列 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, …，它的首兩項都等於 1，之後的每一項都等於其前兩項的和。請問在斐波那契數列的首 2009 項中，有多少項是 10 的倍數？__________

【方法一】因 10 的倍數其個位數為 0，而斐波那契數列裡每一個數的個位數依次所形成的數列為 1, 1, 2, 3, 5, 8, 3, 1, 4, 5, 9, 4, 3, 7, 0, 7, 7, 4, 1, 5, 6, 1, 7, 8, 5, 3, 8, 1, 9, 0, 9, 9, 8, 7, 5, 2, 7, 9, 6, 5, 1, 6, 7, 3, 0, 3, 3, 6, 9, 5, 4, 9, 3, 2, 5, 7, 2, 9, 1, 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 3, 1, 4, 5, 9, 4,…。可發現其為每 60 個數一循環的數列，每循環有 4 個 0，分別出現第 15、30、45、60 個位置。因 2009=60×33＋29，因此共有 $33\times 4+1=133$ 個 0，即 133 個 10 的倍數。

【方法二】因 10 的倍數即為 2 與 5 的公倍數，而斐波那契數是 2 的倍數當且僅當該數為斐波那契數列裡的第 3m 項、斐波那契數是 5 的倍數當且僅當該數為斐波那契數列裡的第 5n 項，因此斐波那契數是 10 的倍數當且僅當該數為斐波那契數列裡的第 15k 項。因 $2009=15\times 133+14$，因此共有 133 個 0，即 133 個 10 的倍數。

ANS：133 個

4. 如果 $\sqrt{2}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+x}}$，則 x 等於__________。

$\sqrt{2}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+x}}=1+\cfrac{1}{\cfrac{6+2x+1}{3+x}}=1+\dfrac{3+x}{7+2x}=\dfrac{10+3x}{7+2x}$，即 $\sqrt{2}(7+2x)=10+3x$

兩邊同時平方後得 $98+56x+8x^2=100+60x+9x^2$，即 $x^2+4x+2=0$，

$x=\dfrac{-4\pm\sqrt{16-8}}{2}=-2\pm\sqrt{2}$。代回後可發現 $-2-\sqrt{2}$ 不合，故 $x=-2+\sqrt{2}$。

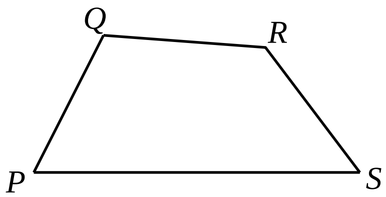
ANS：$-2+\sqrt{2}$

5. 若將乘積 $1\times3\times5\times7\times\ldots\times2007\times2009$ 寫成一個數，請問此數的末三位數字是多少？__________

考慮末三位數字即為考慮除 1000 後所得之餘數。因 $1000=125\times8$，且可直接看出原式必為 125 的倍數，因此所求之乘積末三位數只可能是 125、375、625 或 875。因每四個連續奇數之乘積 $\equiv1\times3\times5\times7\equiv1 \pmod 8$，故原式 $\equiv2009\equiv1 \pmod 8$，所以因此所求之值為 625。

ANS：625

6. 四根鐵桿在其端點用活動接頭連接在一起，構成如圖所示 的一個四邊形。桿 PQ、QR 和 RS 之長都為 120 cm，桿 PS 之長為 240 cm。轉動接頭使得 QR 的中點與桿 PS 儘量靠近，請問其最小距離為多少 cm？__________

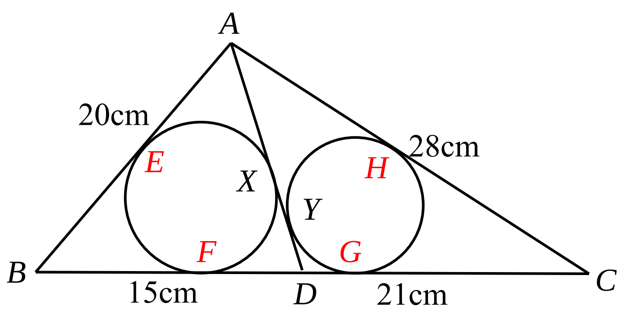


當 R 與 P 儘可能接近時，即當 R 接觸桿 PS 時，QR 的中點 X 將與桿 PS 最近，於是△PQR 是正三角形的。因此所求即為正三角形 PQR 高的一半，即

$\dfrac{1}{2}\times120\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=30\sqrt{3}$ cm。

ANS：$30\sqrt{3}$ cm

7. 如圖，△ABC、△ADC 的內切圓分別切 AD 於點 X、Y。已知 AB=20 cm、AC=28 cm、BD=15 cm、CD=21 cm，請問線段 XY 之長為多少 cm？_______



令 E、F 分別為△ABC 的內切圓在 AB、BD 上的切點，令 G、H 分別為△ADC 的內切圓在 CD、AC 上的切點。

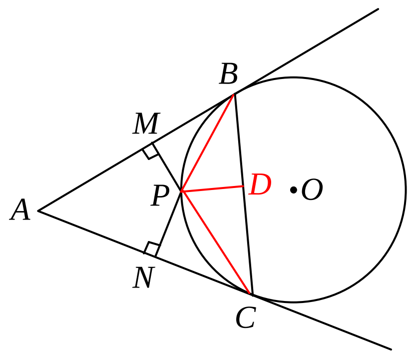
設 $DX=a$ 和 $DY=b$，則所求為 $a-b$。因從圓外一點到一圓的兩切線長度相等，可知

$$\begin{cases} DF=a \Rightarrow BE=BF=15-a \Rightarrow AX=AE=20-(15-a)=5+a \\ DG=b \Rightarrow CH=CG=21-b \Rightarrow AY=AH=28-(21-b)=7+b \end{cases}$$

因 $AD=AY+DY=AX+DX$，故得 $7+2b=5+2a$，即 $a-b=1$。

ANS：1cm

8. 如圖，AB、AC 分別切圓 O 於 B、C 兩點，P 為 BC 弧上一點，且 $PM \perp AB$、$PN \perp AC$。若 $PM=4$、$PN=5$，則 P 點到 BC 的距離為__________。



在 BC 上取 D 點使得 $PD \perp BC$，所求即為 PD 的長度。作 PC、PB 線段。

因 $\angle PCN=\angle PBC$、$\angle PNC=90^\circ=\angle PDB$，所以△$PNC$～△$PDB$，故 $\dfrac{PN}{PD}=\dfrac{PC}{PB}$；

因 $\angle PBM=\angle PCB$、$\angle PMB=90^\circ=\angle PDC$，所以△$PMB$～△$PDC$，故 $\dfrac{PD}{PM}=\dfrac{PC}{PB}$。

因此可知 $\dfrac{PN}{PD}=\dfrac{PC}{PB}=\dfrac{PD}{PM}$，即 $PD=\sqrt{PM \times PN}=\sqrt{20}$

ANS：$\sqrt{20}$

9. 將一堆整數作如下圖的排列：

0	第 1 列
1　1	第 2 列
2　2　2	第 3 列
3　4　4　3	第 4 列
4　7　8　7　4	第 5 列
5　11　15　15　11　5	第 6 列
⋮	⋮

令 $f(n)$ 表示第 n 列上的所有整數之和，則 $f(100)=$__________。

當$n\geq 2$時，可觀察出以下規則：若第 n 列由左至右依序為n_1、n_2、…、n_{n-1}、n_n且$f(n)=n_1+n_2+\ldots+n_n$，則第 n+1 列由左至右依序為$1+n_1$、n_1+n_2、n_2+n_3、n_3+n_4、…、$n_{n-2}+n_{n-1}$、$n_{n-1}+n_n$、n_n+1。故可知

$$\begin{aligned} f(n+1)&=(n_1+1)+(n_1+n_2)+(n_2+n_3)+\ldots+(n_{n-1}+n_n)+(n_n+1)\\ &=2f(n)+2 \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} f(100)&=2\times f(99)+2\\ &=2^2\times f(98)+2^2+2\\ &=2^3\times f(97)+2^3+2^2+2\\ &\vdots\\ &=2^{98}f(2)+2^{98}+2^{97}+\ldots+2^2+2\\ &=2^{99}+2^{98}+2^{97}+\ldots+2^2+2\\ &=2^{100}-2 \end{aligned}$$

ANS：$2^{100}-2$

10. 已知函數$f(x)$滿足$f(-x)=-f(x)$，$f(1)=1$，$f(2)=2$ 且對於$x\geq -1$，$f(x+1)=f(x+4)$。則

$(-1)f(1)+(-1)^2f(2)+(-1)^3f(3)+\cdots+(-1)^{100}f(100)=$__________

$$\begin{aligned} &(-1)f(1)+(-1)^2f(2)+(-1)^3f(3)+\cdots+(-1)^{100}f(100)\\ &=-f(1)+f(2)-f(3)+\cancel{f(4)}-\cancel{f(5)}+\cancel{f(6)}-\cancel{f(7)}+\cancel{f(8)}-\cancel{f(9)}\\ &\quad+\cdots-\cancel{f(99)}+f(100)\\ &=-f(1)+f(2)-f(3)+f(100)\\ &=-f(1)+f(2)-f(3)+f(4)\\ &=-f(0+1)+f(2)-f(-1+4)+f(0+4)\\ &=f(2)-f(0)\\ &=f(2)+f(0)\\ &=2 \end{aligned}$$

ANS：2

11. 有三隻跳蚤，一開始分別位於數線上 0、1、2 的位置。每一次都由最左邊的跳蚤開始起跳，並以最右邊的跳蚤為對稱中心向右跳躍，落在對稱的位置上（如第一次 0→4、第二次 1→7 等等）。請問經過 8 次的跳躍之後，最右邊的跳蚤在數線上的位置所代表的數是多少？__________

令$f(n)$為第 n 次跳躍後最右邊的跳蚤在數線上的位置所代表的數，則可知$f(1)=4$、$f(2)=7$、$f(3)=12$且$f(n+1)=2f(n)-f(n-2)$。因此可得：

$$\begin{aligned} f(8) &= 2f(7)-f(5)=2(2f(6)-f(4))-f(5) \\ &= 4f(6)-f(5)-2f(4) \\ &\vdots \\ &= 20f(3)-7f(2)-12f(1) \\ &= 143 \end{aligned}$$

ANS：143

12. 兩個容器 A 與 B，A 中裝有一公升的水，B 是空的。第 1 次將 A 中水量的 $\frac{1}{2}$ 倒入 B 中；第 2 次將 B 中水量的 $\frac{1}{3}$ 倒入 A 中；第 3 次將 A 中水量的 $\frac{1}{4}$ 倒入 B 中，…，如此繼續操作，第 N 次倒入的水量為 $\frac{1}{N+1}$。假設倒水的過程中，水的總量沒有減少，在經過第 20 次操作之後停止，則在容器 A 中有__________公升的水。

利用數學歸納法證明第奇數次操作後 (即第 $2n-1$ 次操作後)A、B 各有 $\frac{1}{2}$ 公升的水。

$n=1$：第 1 次操作即為將 A 中水量的 $\frac{1}{2}$ 倒入 B 中，故各有 $\frac{1}{2}$ 公升，成立。

假設 $n=k$ 時成立，即第 $2k-1$ 次操作後 A、B 各有 $\frac{1}{2}$ 公升的水。則 $n=k+1$ 時即為驗證第 $2k+1$ 次操作後 A、B 各有 $\frac{1}{2}$ 公升的水。因第 2k 次操作後 A 中的水量為 $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2k+1}=\frac{k+1}{2k+1}$、B 中的水量為 $1-\frac{k+1}{2k+1}=\frac{k}{2k+1}$，故第 $2k+1$ 次操作後 A 中的水量為 $\frac{k+1}{2k+1}\times\frac{2k+1}{2k+2}=\frac{1}{2}$、B 中的水量為 $1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$，得證。

因此在第 19 次操作後 A、B 各有 $\frac{1}{2}$ 公升的水，所以第 20 次操作後 A 中的水量為 $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{21}=\frac{11}{21}$

ANS：$\frac{11}{21}$

第二部分：計算證明，每題 20 分，共 60 分

(注意：在答案卷上請依題號作答，須詳列過程及說明理由)

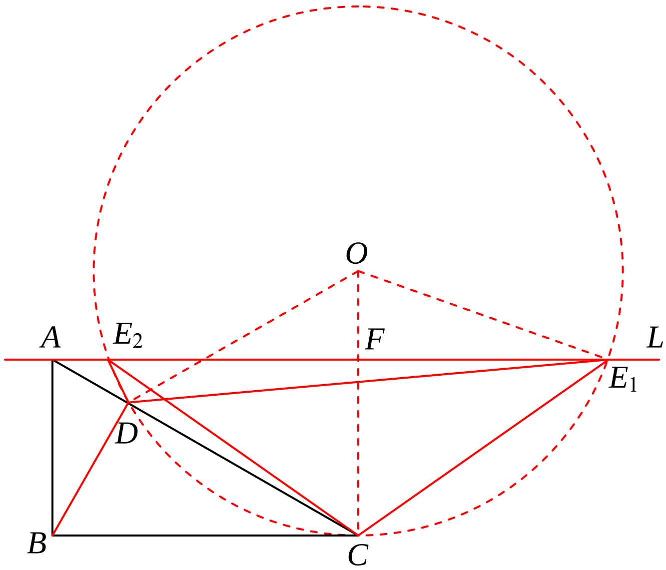
1. $\triangle ABC$ 為直角三角形，$\angle ABC=90°$、$\angle ACB=30°$且 $BD\perp AC$、$AB=12$ cm。過 A 做 BC 的平行線 L，在 L 上找一點 E 使得$\angle DEC=30°$。試求所有滿足上述條件的 AE 之可能長度。

已知 $AB=12$，且直角三角形 ABC 的三個角為 30°、60°、90°可知 $BC=12\sqrt{3}$、$CD=18$。(給 5 分)

由於$\angle ACB=30^\circ=\angle DEC$，因此過 E，C 和 D 的圓 O 有 BC 作為在 C 的切線，如圖，可知 $OC\perp BC$。

因 $\angle COD=2\angle DEC=60^\circ$(圓心角是圓周角的兩倍)且$\angle DCO=90^\circ-30^\circ=60^\circ$，故$\triangle COD$ 是正三角形，於是 $OC=OE=CD=18$。(給 10 分)

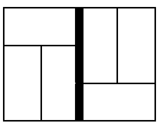
設 OC 交 L 於 F，則可知四邊形 $ABCF$ 是矩形，因此 $OF=6$，故在



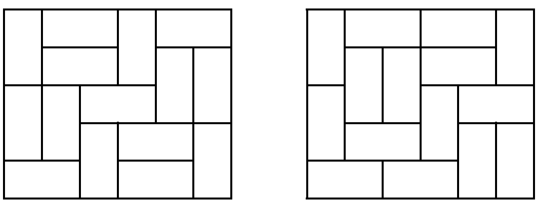
$\triangle OFE$ 中，$FE=\sqrt{OE^2-OF^2}=12\sqrt{2}$。由圖可知 E 可能有兩個位置且 $AF=BC=12\sqrt{3}$，所以 $AE=12\sqrt{3}+12\sqrt{2}$ 或$12\sqrt{3}-12\sqrt{2}$ (給 5 分，只給一個答案 2 分)

ANS：$12\sqrt{3}+12\sqrt{2}$ 或$12\sqrt{3}-12\sqrt{2}$ cm

2. 用長為 1 寬為 2(不考慮厚度)的磚砌牆。砌出的牆如有貫穿全圖左右或上下的直線出現，稱此為瑕疵線。



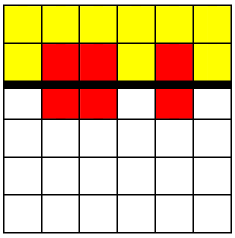
5×6 的矩形可用以下兩種方式砌成**沒有**瑕疵線的牆：



請問 6×6 的矩形是否可以砌成**沒有**瑕疵線的牆？如果可以，請舉出一個例子；如果不能，請證明。

6×6 的正方形有 5 條水平及 5 條鉛直的切割線，假設這些切割線都不是瑕疵線，則它至少要切過一塊磚。(給 5 分)可利用反證法證明非瑕疵的切割線都切過偶數塊磚：

假設有一條水平切割線切過奇數塊磚，考慮圖形上半部塗黃色部份，其面積為奇數單位，不可能被 1×2 的磚鋪滿，矛盾。鉛直切割線亦然。(給 10 分)



6×6 正方形的 10 條切割線至少要切過 2×10 塊磚，但在 6×6 的正方形中只有 18 塊磚。故 6×6 的牆必有瑕疵線。(給 5 分)

3. 設 a 為正整數且 $a+60$ 與 $a-60$ 均為完全平方數，試求 a 的所有可能值。

令 $n^2=a+60$、$m^2=a-60$，可得 $n^2-m^2=120$，即 $(n+m)(n-m)=2^3\times3\times5$(給 5 分)

因 $n+m$、$n-m$ 的奇偶性相同，故可知 $n+m$、$n-m$ 皆為偶數。所以可知：$(n+m,\ n-m)$=(60, 2)、(30, 4)、(20, 6)或(12, 10)。(給 5 分)

因 $a=m^2+60=\left[\dfrac{(n+m)-(n-m)}{2}\right]^2+60$，故 a 之值可為 $29^2+60=901$、$13^2+60=229$、$7^2+60=109$、$1^2+60=61$。(給 10 分，只給答案每組給 2 分)

ANS：901、229、109、61