

# 「2009 年青少年數學國際城市邀請賽」

## 參賽代表遴選初選

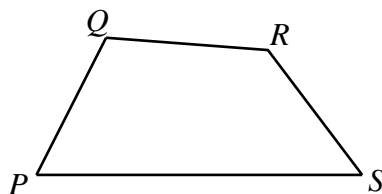
### 個人數學競賽試題

編號: \_\_\_\_\_ 校名: \_\_\_\_\_ 國中 姓名: \_\_\_\_\_

作答時間: 二小時

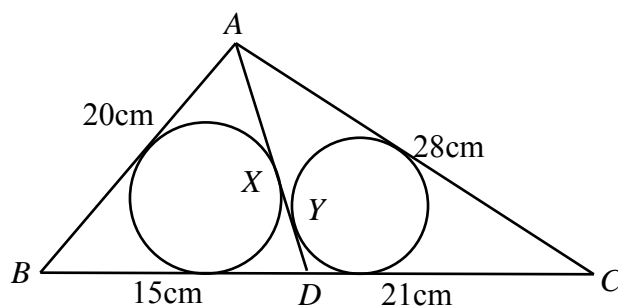
#### 第一部分：填充題，每小題 5 分，共 60 分

1. 從 1 到 2009，所有 7 的倍數之和為\_\_\_\_\_。
2. 一個長方形，如果長減少 5 公分，寬減少 2 公分，那麼面積就減少 66 平方公分，這時剩下的部分恰好成為一個正方形。請問原來長方形的面積為多少平方公分？\_\_\_\_\_
3. 斐波那契數列 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...，它的首兩項都等於 1，之後的每一項都等於其前兩項的和。請問在斐波那契數列的首 2009 項中，有多少項是 10 的倍數？\_\_\_\_\_
4. 如果  $\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3+x}}$ ，則  $x$  等於\_\_\_\_\_。
5. 若將乘積  $1 \times 3 \times 5 \times 7 \times \dots \times 2007 \times 2009$  寫成一個數，請問此數的末三位數字是多少？\_\_\_\_\_
6. 四根鐵桿在其端點用活動接頭連接在一起，構成如圖所示的一個四邊形。桿  $PQ$ 、 $QR$  和  $RS$  之長都為 120 cm，桿  $PS$  之長為 240 cm。轉動接頭使得  $QR$  的中點與桿  $PS$  儘量靠近，請問其最小距離為多少 cm？\_\_\_\_\_

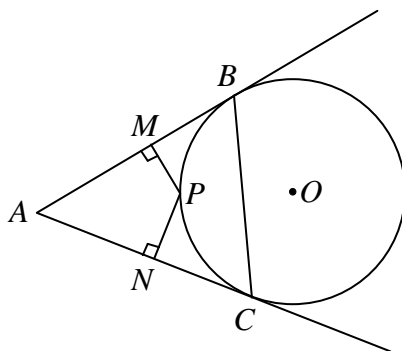


(翻面繼續作答)

7. 如圖， $\triangle ABC$ 、 $\triangle ADC$  的內切圓分別切  $AD$  於點  $X$ 、 $Y$ 。已知  $AB=20$  cm、 $AC=28$  cm、 $BD=15$  cm、 $CD=21$  cm，請問線段  $XY$  之長為多少 cm？\_\_\_\_\_



8. 如圖， $AB$ 、 $AC$  分別切圓  $O$  於  $B$ 、 $C$  兩點， $P$  為  $BC$  弧上一點，且  $PM \perp AB$ 、 $PN \perp AC$ 。若  $PM=4$ 、 $PN=5$ ，則  $P$  點到  $BC$  的距離為\_\_\_\_\_。



9. 將一堆整數作如下圖的排列：

0	第 1 列
1 1	第 2 列
2 2 2	第 3 列
3 4 4 3	第 4 列
4 7 8 7 4	第 5 列
5 11 15 15 11 5	第 6 列
⋮	⋮

令  $f(n)$  表示第  $n$  列上的所有整數之和，則  $f(100)=$ \_\_\_\_\_。

10. 已知函數  $f(x)$  滿足  $f(-x)=-f(x)$ ， $f(1)=1$ ， $f(2)=2$  且對於  $x \geq -1$ ， $f(x+1)=f(x+4)$ 。則  
 $(-1)f(1)+(-1)^2 f(2)+(-1)^3 f(3)+\cdots+(-1)^{100} f(100)=$ \_\_\_\_\_

11. 有三隻跳蚤，一開始分別位於數線上 0、1、2 的位置。每一次都由最左邊的跳蚤開始起跳，並以最右邊的跳蚤為對稱中心向右跳躍，落在對稱的位置上（如第一次 0→4、第二次 1→7 等等）。請問經過 8 次的跳躍之後，最右邊的跳蚤在數線上的位置所代表的數是多少？\_\_\_\_\_
12. 兩個容器 A 與 B，A 中裝有一公升的水，B 是空的。第 1 次將 A 中水量的  $\frac{1}{2}$  倒入 B 中；第 2 次將 B 中水量的  $\frac{1}{3}$  倒入 A 中；第 3 次將 A 中水量的  $\frac{1}{4}$  倒入 B 中，...，如此繼續操作，第 N 次倒入的水量為  $\frac{1}{N+1}$ 。假設倒水的過程中，水的總量沒有減少，在經過第 20 次操作之後停止，則在容器 A 中有 \_\_\_\_\_ 公升的水。

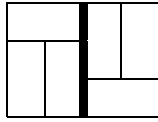
## 第二部分：計算證明，每題 20 分，共 60 分

(注意：在答案卷上請依題號作答，須詳列過程及說明理由)

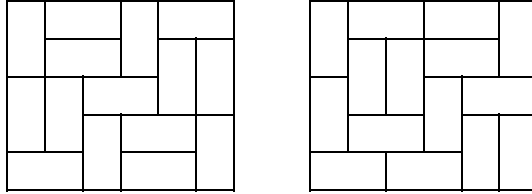
1.  $\triangle ABC$  為直角三角形， $\angle ABC=90^\circ$ 、 $\angle ACB=30^\circ$  且  $BD \perp AC$ 、 $AB=12$  cm。過 A 做 BC 的平行線 L，在 L 上找一點 E 使得  $\angle DEC=30^\circ$ 。試求所有滿足上述條件的 AE 之可能長度。

(翻面繼續作答)

2. 用長為 1 寬為 2(不考慮厚度)的磚砌牆。砌出的牆如有貫穿全圖左右或上下的直線出現，稱此為瑕疵線。



5x6 的矩形牆可用以下兩種方式砌成沒有瑕疵線的牆：



請問 6x6 的矩形牆是否可以砌成沒有瑕疵線的牆？如果可以，請舉出一個例子；如果不能，請證明。

3. 設  $a$  為正整數且  $a+60$  與  $a-60$  均為完全平方數，試求  $a$  的所有可能值。