「2010年青少年數學國際城市邀請賽」

參賽代表遴選初選

個人數學競賽試題

編 號:＿＿＿＿＿＿ 校 名: ＿＿＿＿＿＿ 姓 名: ＿＿＿＿＿＿

作答時間: 二 小 時

第一部分：填充題，每小題 5 分，共 60 分

1. 9^{2010}被 11 除的餘數為＿＿＿＿＿。

【參考解法】

由費馬小定理可知$9^{10}\equiv 1(\text{mod}11)$，故$9^{2010}\equiv(9^{10})^{201}\equiv 1^{201}\equiv 1(\text{mod}11)$。

答：1

2. 計算$1^3+2^3+3^3+4^3+\ldots\ldots+99^3+100^3=$＿＿＿＿＿。

【參考解法】

$$1^3+2^3+3^3+4^3+\ldots\ldots+99^3+100^3=\left(\frac{100\times(100+1)}{2}\right)^2=25502500$$
。

答：25502500

3. 已知 p、q、r 和 s 為不等於 0 的實數，若 r、s 是方程式$x^2+px+q=0$的兩根，而 p、q 是方程式$x^2+rx+s=0$的兩根，則 $p+q+r+s$ 的值是＿＿＿＿＿。

【參考解法】

由根與係數的關係知$\begin{cases} r+s=-p \\ p+q=-r \end{cases}$，故$-p=r+s=-(p+q)+s=-p-q+s$，即

$s=q$，再利用根與係數的關係知$\begin{cases} rs=q\Rightarrow r=1 \\ pq=s\Rightarrow p=1 \end{cases}$，故 $p+q+r+s=-r-p=-2$。

答：-2

4. 有 8 人參加某一次棋賽，比賽採單循環賽，即每人都與其它人各恰賽 1 場。贏家得 2 分、平手各得 1 分，輸家得 0 分。棋賽結束後，結果每個人所得的分數均不相同，且第二名的得分等於最後四名得分的總和，第三名的得分為 11 分。則第四名的得分是＿＿＿＿＿分。

【參考解法】

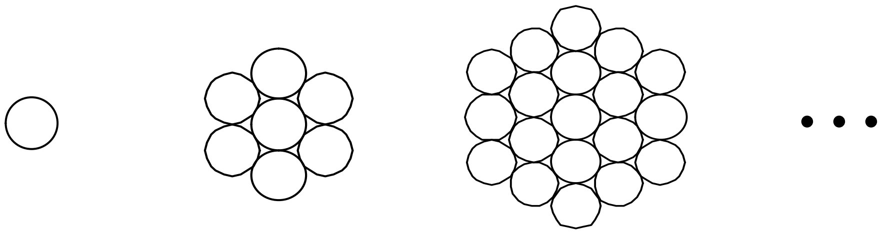
可觀察知 8 人的分數總和應為 56 分。

由第三名為 11 分可知第一名與第二名的分數應為 14、13、12 中的兩個。

若 14 分為第一名、12 分為第二名，則第一名七場全獲勝、第二名勝六場敗一場，故第二名必敗給第一名其餘皆取勝，故第三名至少敗二場，但由第三名的 11 分知第三名至多敗一場，矛盾，故不合。
若 13 分為第二名，則第一名得 14 分，即第一名七場全獲勝、第二名必有一場平手且其餘六場皆獲勝，矛盾，故不合。
故 13 分為第一名，即第二名得 12 分，再由第三名的 11 分及第二名的得分等於最後四名得分的總和知第四名分數為$56-13-12-11-12=8$分。

答：8 分

5. 如圖所示，以下為大小相同的圓所構成的造形，每一堆的圓皆緊密相切。則第十堆圓的個數有__________個。



第一堆　　第二堆　　第三堆

【參考解法】
令第 n 堆的個數為 a_n。則可觀察知 $a_n=1+6\times1+6\times2+6\times3+\cdots+6(n-1)$。故所求為 $a_{10}=1+6\times1+6\times2+\cdots+6\times9=271$。

答：271

6. 已知 a、b、c 均為實數$(a\geq b\geq c)$，且滿足 $a+b+c=10$ 及 $abc-23a=40$，則 $|a|+|b|+|c|$之最小值為__________。

【參考解法】
因 $a+b+c=10>0$ 且 $a\geq b\geq c$，故 a 不為 0。再由 $b+c=10-a$ 及 $abc-23a=40$ 可知$bc=23+\dfrac{40}{a}$，故利用根與係數的關係知 b 與 c 為 $x^2-(10-a)x+(23+\dfrac{40}{a})=0$ 的兩根，換言之判別式$(10-a)^2-4\times(23+\dfrac{40}{a})\geq0$，即

$$a^3-20a^2+8a-160\geq0$$

$$(a^2+8)(a-20)\geq0$$

故知$a\geq20$，即$|a|\geq20$。再因 $a+b+c=10$，故$b+c\leq-10$，因此$|b+c|\geq10$，再由三角不等式知$|b|+|c|\geq|b+c|\geq10$，故$|a|+|b|+|c|\geq30$。

答：30

7. 設 n 是正整數且$100\leq n\leq400$，若$\dfrac{n^3-99}{n^3-92}$不是最簡分數，則正整數 n 的可能值有_____個。

【參考解法】

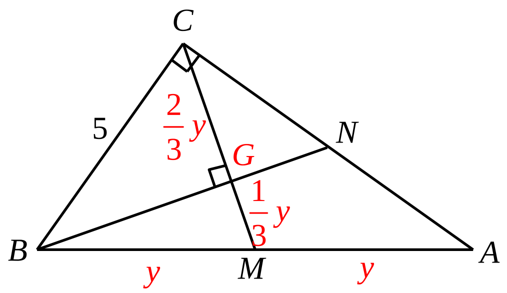
令 $n^3-99=A$，則 $\dfrac{n^3-99}{n^3-92}=\dfrac{A}{A+7}$，故由 $\dfrac{A}{A+7}$ 不是最簡分數可知 A 必有因數 7，即 $n^3-99\equiv n^3-1\equiv 0 \pmod 7$，故 $n\equiv 1$、2、$4 \pmod 7$。

因 $7\times 14+2=100\le n\le 400=7\times 57+1$，故 $n\equiv 1\pmod 7$ 的 n 可能值有 43 個、$n\equiv 2\pmod 7$ 的 n 可能值有 43 個、$n\equiv 4\pmod 7$ 的 n 可能值有 43 個，共 129 個。

答：129 個

8. 如下圖△ABC 是直角三角形且角 C 為直角，已知 AC 邊的中線 BN 與 AB 邊的中線 CM 互相垂直且 BC=5，則 BN 的長度為 ______。

【參考解法】



如圖，令 $BM=AM=y$，因△ABC 是直角三角形且角 C 為直角故可知 $CM=y$。

因 AC 邊的中線 BN 與 AB 邊的中線 CM 的交點 G 為重心，因此 $CG=\dfrac{2}{3}AM=\dfrac{2}{3}y$、$GM=\dfrac{1}{3}AM=\dfrac{1}{3}y$、$BN=\dfrac{3}{2}BG$。

利用勾股定理可知 $BG^2=BC^2-CG^2=BM^2-GM^2$，故可得

$$5^2-(\frac{2}{3}y)^2=y^2-(\frac{1}{3}y)^2$$

$$y^2=\frac{75}{4}$$

故 $BG=\sqrt{\dfrac{8}{9}y^2}=\dfrac{5\sqrt{6}}{3}$，因此 $BN=\dfrac{5\sqrt{6}}{2}$

答：$\dfrac{5\sqrt{6}}{2}$

9. 已知 a、b、c、d、e 為五個彼此相異的整數，且滿足

$$(4-a)(4-b)(4-c)(4-d)(4-e)=12，$$

則 $a+b+c+d+e$=______。

【參考解法】

因 a、b、c、d、e 為五個彼此相異的整數，故 $4-a$、$4-b$、$4-c$、$4-d$、$4-e$ 也是五個彼此相異的整數。因 $12=2^2\times 3$，故 12 寫成五個彼此相異的整數的乘積僅可能為 $(-1)\times 1\times(-2)\times 2\times 3$，故 $(4-a)+(4-b)+(4-c)+(4-d)+(4-e)=3$，即 $a+b+c+d+e$=17。

答：17

10. 設 $N=1+11+111+\cdots+\underbrace{111\cdots 11}_{2010個「1」}$，則 N 之值的末五位數是________。

【參考解法】

$$N=1+11+111+\cdots+\underbrace{111\cdots11}_{2010\text{個「1」}}$$

$$=\underbrace{1+1+1+\cdots+1}_{2010\text{個}}+\underbrace{10+10+10+\cdots+10}_{2009\text{個}}+\underbrace{100+100+100+\cdots+100}_{2008\text{個}}+\cdots+\underbrace{1000\cdots0}_{2009\text{個「0」}}$$

故 N 之值的末五位數即為 2010+2009×10+2008×100+2007×1000+2006×10000 的末五位數，即是 89900。

答：89900

11. 一個圓的直徑兩端分別已經填有數 2 與數 3，每次操作都把圓上每段弧兩端上的數之平均寫在此段弧的中點上。則經過十次操作後，圓周上的所有數之總和為______。

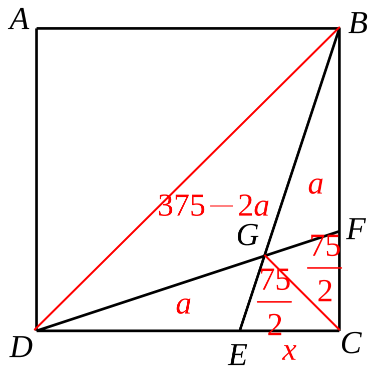
【參考解法】

令第 n 次操作的和為 a_n。則可觀察知 $a_n=5\times 2^n$。故所求為 $a_n=5\times 2^{10}=5120$。

答：5120

12. 下圖中，四邊形 $ABCD$ 是一個邊長為 30 的正方形。已知 E 在 CD 邊上，F 在 BC 邊上且 $CF=CE=x$，若四邊形 $FCEG$ 的面積=75，則 x 之值為______。

【參考解法】



連接 BD、CG，則令△BGF 的面積與△DGE 的面積為 a，則可知△BGD 的面積為 30×30÷2－75－2a=375－2a。由面積比可知 $a:\dfrac{75}{2}=375-2a:a+\dfrac{75}{2}$，即

$$2a:75=750-4a:2a+75$$

故可得

$$4a^2+450a-75\times750=0$$

$$(a-75)(4a+750)=0$$

所以 a=75，即 $DE:EC=75:\dfrac{75}{2}=2:1$，故 x=10。

答：10

第二部分：計算證明，每題 20 分，共 60 分

(注意：在答案卷上請依題號作答，須詳列過程及說明理由)

1. 設 $n!=1\times2\times3\times\cdots\times n$，若將 2010 分為十二個正整數 a_1、a_2、⋯、a_{12} 之和，且使 $(a_1!)\times(a_2!)\times\ldots\times(a_{12}!)$ 最小，其中 $a_1\le a_2\le\cdots\le a_{12}$，試問此時 a_1、a_2、⋯、a_{12} 之值為何?

【參考解法】

因 $2010=12\times167+6$，可令

$a_1=a_2=a_3=a_4=a_5=a_6=167$、$a_7=a_8=a_9=a_{10}=a_{11}=a_{12}=167+1=168$，

則 $(a_1!)\times(a_2!)\times\cdots\times(a_{12}!)=(167!)^6\times(168!)^6$。

若有另一組 12 個正整數 b_1、b_2、⋯、b_{12} 也滿足條件，則可令 $k_i=b_i-a_i$，且知 $k_1+k_2+\cdots+k_{12}=0$。

若 $k_i>0$，則 $b_i!=(a_i!)\times(a_i+1)\times(a_i+2)\times\cdots\times(a_i+k_i)$；

若 $k_i<0$，則 $b_i!=(a_i!)\times\dfrac{1}{(a_i-1)}\times\dfrac{1}{(a_i-2)}\times\cdots\times\dfrac{1}{(a_i-k_i)}$；

因 $a_1=a_2=a_3=a_4=a_5=a_6=167$、$a_7=a_8=a_9=a_{10}=a_{11}=a_{12}=167+1=168$，故可知 $a_i+m\ge a_j-n$，即 $\dfrac{a_i+m}{a_j-n}\ge 1$。

因此可知 $(b_1!)\times(b_2!)\times\cdots\times(b_{12}!)\ge(a_1!)\times(a_2!)\times\cdots\times(a_{12}!)=(167!)^6\times(168!)^6$，

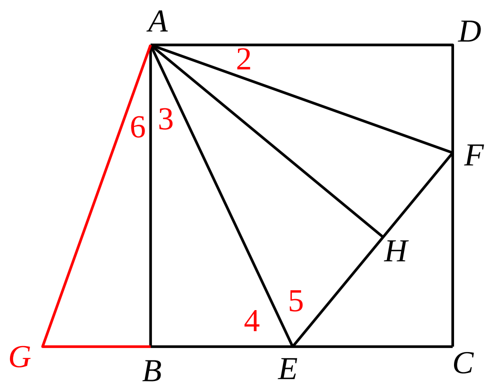
故 $(a_1!)\times(a_2!)\times\cdots\times(a_{12}!)=(167!)^6\times(168!)^6$ 是最小的。

答：$a_1=a_2=a_3=a_4=a_5=a_6=167$、$a_7=a_8=a_9=a_{10}=a_{11}=a_{12}=167+1=168$

(只給出正確答案未證明最小，給 10 分)

2. 已知四邊形 $ABCD$ 為正方形，點 F 在 $\overline{CD}$ 上，點 E 在 $\overline{BC}$ 上，使得 $\angle EAF=45°$，由 A 作 $\overline{EF}$ 之垂線，垂足為點 H，試證 $\overline{BE}=\overline{EH}$。

【參考解法】



在 BC 的沿長線上取一點 G 使得 $BG=DF$。

連接 AG，則因 $BG=DF$、

$AB=AD$ 且

$\angle ABG=\angle ADF=90°$

可知 $\triangle ABG\cong\triangle ADF$，故 $\angle 2=\angle 6$ 且 $AF=AG$。

因為 $\angle EAF=45°$，故 $\angle 2+\angle 3=90°-45°=45°$，

(給 5 分) 即 $\angle 6+\angle 3=45°$，換言之，

$\angle GAE=\angle EAF$。

再因 $AE=AE$，故可知 $\triangle AEG\cong\triangle AEF$，因此有

$\angle 4=\angle 5$，所以再由 $AH\perp EF$、$AE=AE$ 可推得 $\triangle AEB\cong\triangle AEH$，故 $BE=EH$。

3. 如果從 1、4、7、10、⋯、94、97 這三十三個數中任取 k 個，可保證其中至少有二個數的和是 41，試問 k 值最小應為多少?。

【參考解法】

先考慮小於 41 的數中，因 41=1+40=4+37=7+34=10+31=13+28=16+25=19+22，故在數對(1, 40)、(4, 37)、(7, 34)、(10, 31)、(13, 28)、(16, 25)、(19, 22)中必須各取一個數後再從其餘的數任取一個，此時取了 8 個數(給 10 分)；而大於 41 的數必須全部取出，故需再取 19 個數，因此至少需取 8+19=27 個數。

答：27