「2010 年青少年數學國際城市邀請賽」

參賽代表遴選初選

個人數學競賽試題

編 號:_____________ 校 名: ______________ 姓 名: ______________

作答時間: 二 小 時

第一部分：填充題，每小題 5 分，共 60 分

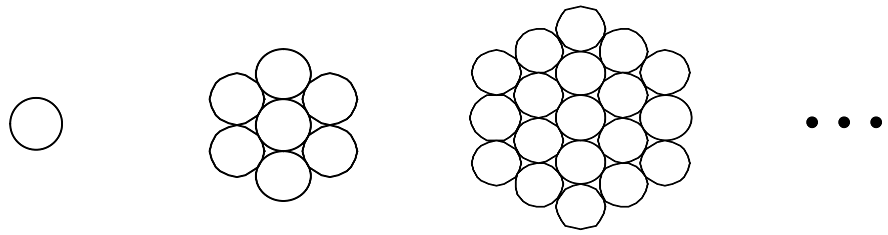
1. 9^{2010} 被 11 除的餘數為___________。

2. 計算$1^3+2^3+3^3+4^3+........+99^3+100^3=$___________。

3. 已知 p、q、r 和 s 為不等於 0 的實數，若 r、s 是方程式 $x^2+px+q=0$ 的兩根，而 p、q 是方程式 $x^2+rx+s=0$ 的兩根，則 $p+q+r+s$ 的值是___________。

4. 有 8 人參加某一次棋賽，比賽採單循環賽，即每人都與其它人各恰賽 1 場。贏家得 2 分、平手各得 1 分，輸家得 0 分。棋賽結束後，結果每個人所得的分數均不相同，且第二名的得分等於最後四名得分的總和，第三名的得分為 11 分。則第四名的得分是__________分。

5. 如圖所示，以下為大小相同的圓所構成的造形，每一堆的圓皆緊密相切。則第十堆圓的個數有___________個。



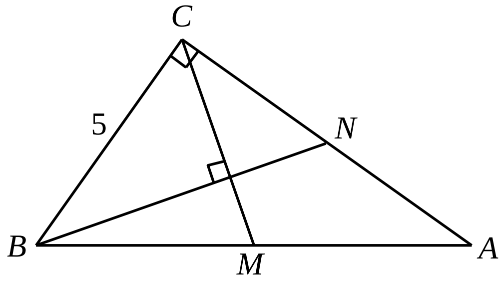
第一堆　　第二堆　　第三堆

6. 已知 a、b、c 均為實數($a\geq b\geq c$)，且滿足 $a+b+c=10$ 及 $abc-23a=40$，則 $|a|+|b|+|c|$ 之最小值為___________。

7. 設 n 是正整數且$100\leq n\leq 400$，若$\dfrac{n^3-99}{n^3-92}$不是最簡分數，則正整數 n 的可能值有_____個。

(翻面繼續作答)

8. 如下圖△ABC 是直角三角形且角 C 為直角，已知 AC 邊的中線 BN 與 AB 邊的中線 CM 互相垂直且 BC=5，則 BN 的長度為 ______。



9. 已知 a、b、c、d、e 為五個彼此相異的整數，且滿足

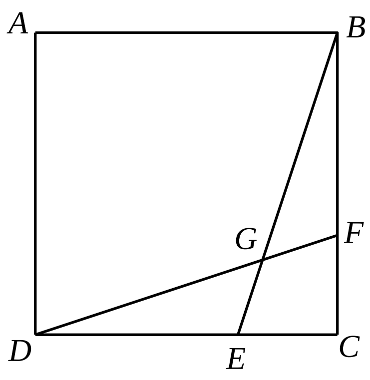
$$(4-a)(4-b)(4-c)(4-d)(4-e)=12，$$

則 $a+b+c+d+e$=______。

10. 設 $N=1+11+111+\cdots+\underbrace{111\cdots11}_{2010個「1」}$，則 N 之值的末五位數是________。

11. 一個圓的直徑兩端分別已經填有數 2 與數 3，每次操作都把圓上每段弧兩端上的數之平均寫在此段弧的中點上。則經過十次操作後，圓周上的所有數之總和為______。

12. 下圖中，四邊形 $ABCD$ 是一個邊長為 30 的正方形。已知 E 在 CD 邊上，F 在 BC 邊上且 CF=CE=x，若四邊形 $FCEG$ 的面積=75，則 x 之值為______。



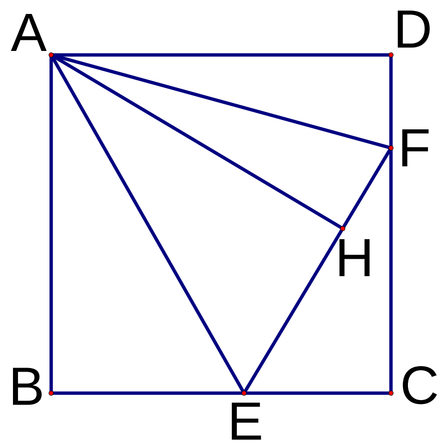
(翻面繼續作答)

第二部分：計算證明，每題 20 分，共 60 分

(注意：在答案卷上請依題號作答，須詳列過程及說明理由)

1. 設$n!=1\times2\times3\times\cdots\times n$，若將 2010 分為十二個正整數$a_1$、$a_2$、$\cdots$、$a_{12}$之和，且使$(a_1!)\times(a_2!)\times\ldots\times(a_{12}!)$最小，其中$a_1\le a_2\le\cdots\le a_{12}$，試問此時$a_1$、$a_2$、$\cdots$、$a_{12}$之值為何?

2. 已知四邊形 $ABCD$ 為正方形，點 F 在 $\overline{CD}$ 上，點 E 在 $\overline{BC}$ 上，使得 $\angle EAF=45^0$，由 A 作 $\overline{EF}$ 之垂線，垂足為點 H，試證 $\overline{BE}=\overline{EH}$ 。



3. 如果從 1、4、7、10、…、94、97 這三十三個數中任取 k 個，可保證其中至少有二個數的和是 41，試問 k 值最小應為多少?。