將一個 $7\times7\times7$ 的正立方體切成一些 $4\times4\times4$, $3\times3\times3$, $2\times2\times2$ 或 $1\times1\times1$ 的小正立方體，要求切出的小正立方體個數越少越好，請問至少切出多少個？

可知在 $7\times7\times7$ 的正立方體中，$4\times4\times4$ 的小正立方體最多可切出 1 個、$3\times3\times3$ 的小正立方體最多可切出 8 個、$2\times2\times2$ 的小正立方體最多可切出 27 個。而每多 1 個 $4\times4\times4$ 的小正立方體，$2\times2\times2$ 的小正立方體個數至少減少 8 個或 $3\times3\times3$ 的小正立方體至少減少 1 個；每多 1 個 $3\times3\times3$ 的小正立方體，$2\times2\times2$ 的小正立方體個數至少減少 1 個。

當我們決定了 $4\times4\times4$ 與 $3\times3\times3$ 的小正立方體個數後，為了切出最少的小正立方體個數，$2\times2\times2$ 的小正立方體個數必須盡可能多。

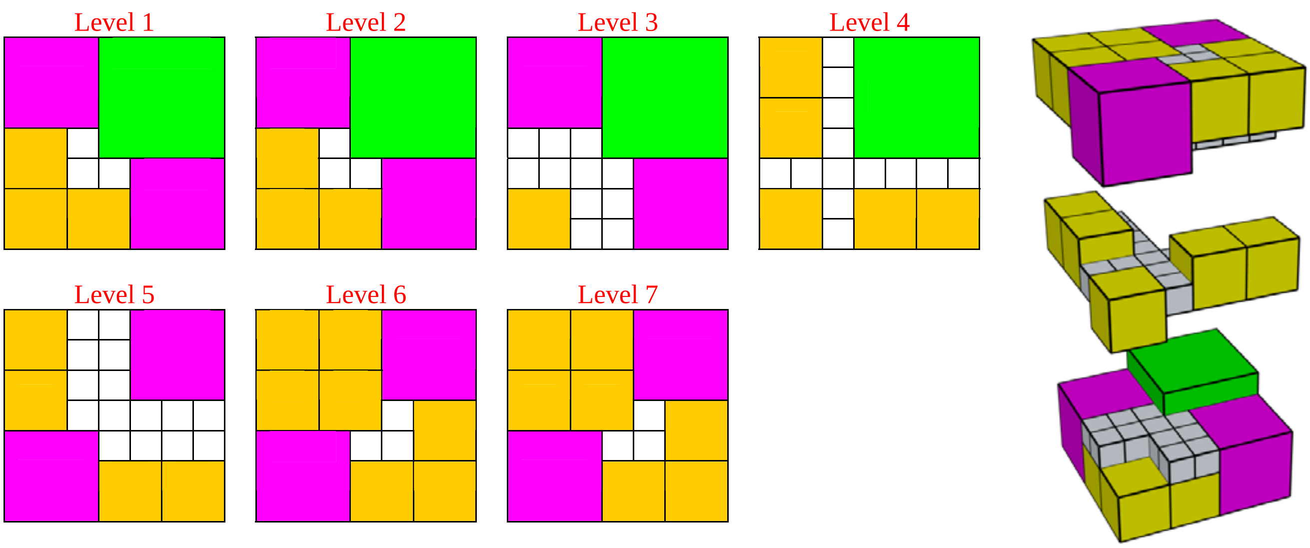
因此可知：

(i) 1 個 $4\times4\times4$ 的小正立方體、7 個 $3\times3\times3$ 的小正立方體時：此時無法再切出 $2\times2\times2$ 的小正立方體，故 $1\times1\times1$ 的小正立方體個數為 $343-1\times64-7\times27=90$，合計有 $1+7+90=98$ 個小正立方體。

(ii) 1 個 $4\times4\times4$ 的小正立方體、6 個 $3\times3\times3$ 的小正立方體時：因此時可視為不切出在(i)內的其中 1 個 $3\times3\times3$ 的小正立方體，在該位置改切 $2\times2\times2$ 的小正立方體，故最多可切出 7 個 $2\times2\times2$ 的小正立方體，所以 $1\times1\times1$ 的小正立方體個數為 $343-1\times64-6\times27-7\times8=61$，合計有 $1+6+7+61=75$ 個小正立方體。

(iii) 1 個 $4\times4\times4$ 的小正立方體、5 個 $3\times3\times3$ 的小正立方體時：因此時可視為不切出在(i)內的其中 2 個 $3\times3\times3$ 的小正立方體，在該位置改切 $2\times2\times2$ 的小正立方體，故最多可切出 11 個 $2\times2\times2$ 的小正立方體，所以 $1\times1\times1$ 的小正立方體個數為 $343-1\times64-5\times27-11\times8=56$，合計有 $1+5+11+56=73$ 個小正立方體。

(iv) 1 個 $4\times4\times4$ 的小正立方體、4 個 $3\times3\times3$ 的小正立方體時：$2\times2\times2$ 的小正立方體個數最多為 $27-1\times8-4\times1=15$；若可切成，此時 $1\times1\times1$ 的小正立方體個數為 $343-1\times64-4\times27-15\times8=51$，合計有 $1+4+15+51=71$ 個小正立方體。如下圖所示，此情況可以完成。



此後，每減少 k 個 3×3×3 的小正立方體時(4≧k≧1)，2×2×2 的小正立方體個數最多為 27－1×8－(4－k)×1＝15+k，即 1×1×1 的小正立方體個數最少為 343－1×64－(4－k)×27－(15+k)×8＝51+19k，合計有 1+(4－k)+ (15+k)+ (51+19k)＝71+19k 個小正立方體，都多於 71 個。

(v) 0 個 4×4×4 的小正立方體、8 個 3×3×3 的小正立方體時：此時無法再切出 2×2×2 的小正立方體，故 1×1×1 的小正立方體個數為 343－8×27＝127，合計有 8+127＝135 個小正立方體。

(vi) 0 個 4×4×4 的小正立方體、7 個 3×3×3 的小正立方體時：因此時可視為不切出在(v)內的其中 1 個 3×3×3 的小正立方體，在該位置改切 2×2×2 的小正立方體，故最多可切出 8 個 2×2×2 的小正立方體，所以 1×1×1 的小正立方體個數為 343－7×27－8×8＝90，合計有 7+8+90＝105 個小正立方體。

(vii) 0 個 4×4×4 的小正立方體、6 個 3×3×3 的小正立方體時：因此時可視為不切出在(v)內的其中 2 個 3×3×3 的小正立方體，在該位置改切 2×2×2 的小正立方體，故最多可切出 13 個 2×2×2 的小正立方體，所以 1×1×1 的小正立方體個數為 343－6×27－13×8＝77，合計有 6+13+77＝96 個小正立方體。

(viii) 0 個 4×4×4 的小正立方體、5 個 3×3×3 的小正立方體時：因此時可視為不切出在(v)內的其中 3 個 3×3×3 的小正立方體，在該位置改切 2×2×2 的小正立方體，故最多可切出 18 個 2×2×2 的小正立方體，所以 1×1×1 的小正立方體個數為 343－5×27－18×8＝64，合計有 5+18+64＝87 個小正立方體。

此後，每減少 k 個 3×3×3 的小正立方體時(4≧k≧1)，2×2×2 的小正立方體個數最多為 27－(5－k)×1＝22+k，即 1×1×1 的小正立方體個數最少為 343－(5－k)×27－(22+k)×8＝32+19k，合計有(5－k)+ (22+k)+ (32+19k)＝59+19k 個小正立方體，都多於 71 個。故答案為 **71**。