

第四屆青少年數學國際城市(印度)邀請賽
IIWYMIC 代表隊選拔賽
個人數學競賽試題

時間: 二 小 時

第一部分: 填充題, 每小題 5 分, 共 60 分

(請將各題正確的答案寫在答案卷對應題號的空格內。)

1. 有一數列 $1 - 1 - 1 + 1 - 1 - 1 + 1 - 1 - 1 + \cdots$ 依此規則一直到第 2002 項的總和= _____。

2. 已知 a, b 兩數不相等且滿足

$$799a^2 + 2001a + 799 = 0,$$

$$799b^2 + 2001b + 799 = 0,$$

則 $\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1}$ 的值為 _____。

3. 已知

$$(3x - 1)^{2001} = a_1x^{2001} + a_2x^{2000} + \cdots + a_{2001}x + a_{2002},$$

則 $a_1 + a_2 + \cdots + a_{2001} + a_{2002} =$ _____。

4. 已知在坐標平面上有三點 $A(0, 3), B(1, 0), C(3, 2)$. 若 P 為 x 軸上一點且 \overline{AP} 與 \overline{BC} 交於 D , 並有 $\triangle ADC$ 與 $\triangle BDP$ 的面積相等, 則 P 點的坐標為 _____。

5. 設 $\triangle ABC$ 為一直角三角形, \overline{AC} 為 4 公分, \overline{CB} 為 3 公分, \overline{AB} 為 5 公分。若 D 為斜邊 \overline{AB} 上之一點且 $\overline{CD} \perp \overline{AB}$, E 為 \overline{AC} 上之一點且 $\overline{DE} \perp \overline{AC}$, F 為 \overline{AB} 上之一點且 $\overline{EF} \perp \overline{AB}$, 則 $\frac{\triangle DEF \text{ 的面積}}{\triangle ABC \text{ 的面積}} =$ _____。

6. 設 a, b, c, d 為四個正數且 $1 \leq a \leq b \leq c \leq d \leq 2002$, 則 $\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$ 的最小值為 _____。

7. 設 $n = 1001001001 \cdots 100100$, 其中每個 1 後面恰有兩個 0, 且共有 2001 個 1, 則 n 除以 77 的餘數為_____。
8. 設 m, n, p, q 皆為非負整數, 若對於任意正數 a 均滿足條件:

$$\frac{(a+1)^m}{a^n} = 1 + \frac{(a+1)^p}{a^q},$$

則 $(m+n+p)^q =$ _____。

9. 某農場在魚塭裡放養魚苗 10 萬條, 根據這幾年養魚的經驗, 得知魚苗成長後的存活率為 95%, 經過一段時間後準備打撈出售, 第一次從中網出 40 條魚, 稱得平均每條魚重 2.5 公斤; 第二次從中網出 25 條魚, 稱得平均每條魚重 2.2 公斤; 第三次從中網出 35 條魚, 稱得平均每條魚重 2.8 公斤; 那麼估計存活下來的魚獲之總重量是_____ 公斤。
10. 有一位藝術家將邊長為 1 公尺的正方體計 14 個, 放在地面上將它們擺成下圖的型式, 然後他把露出外面的表面都塗上顏色, 那麼被他染上顏色部分的面積有_____ 平方公尺。
11. 如下圖, $ABCD$ 是一個四邊形, 其中 F 為 \overline{AC} 的中點, E 為 \overline{AC} 與 \overline{BD} 的交點, 若 $\triangle ABE$ 的面積為 8, $\triangle ADE$ 的面積為 6, 且 $\triangle CDE$ 的面積為 8, 則 $\triangle BEF$ 的面積為_____。

12. 傢俱行設計一張方桌由一個桌面和四支腳組成，_____個。

第二部分：計算證明，每題 20 分，共 60 分

(注意：在答案卷上請依題號作答，須詳列過程及說明理由)

1. 設 a, b, c 為 1 至 9 這九個數中的三個相異整數，由 a, b, c 這三個數字可以組成 6 個不同的三位數(例如 bca 表示以 b 為百位數字， c 為十位數字， a 為個位數字的三位數)。如果將這 6 個三位數中最大的減去最小的三位數，其所得的差仍然是當中的一個三位數(即由 a, b, c 所組成的一個三位數)，試分別求出 a, b, c 的值。
2. 有一本書的頁碼是從 1 到 n ，其中 n 為正整數，把所有這些頁碼相加，在相加過程中有一頁碼不小心被加了兩次，結果得到不正確的結果，其和是 2111，試問這個加了兩次的頁碼是那一個數？
3. 如圖， $\triangle ABC$ 的三邊長分別為 $\overline{BC} = a$ ， $\overline{CA} = b$ 及 $\overline{AB} = c$ ， D 是 \overline{AB} 上的一點，過 D 作 $\overline{DE} \parallel \overline{AC}$ 交 \overline{BC} 於 E 點，過 E 作 $\overline{EF} \perp \overline{AB}$ 交 \overline{AB} 於 F 點。如果一元二次方程式 $x^2 - (a+b)x + 2a(b + \frac{c^2}{2a}) = 0$ 的二根和與二根之乘積相等，
(1). 試證： $\triangle ABC$ 為直角三角形。
(2). 若 $\overline{DF} = 3$ ， $\overline{BD} = 12$ ，且 $\frac{\overline{CD}}{\overline{CE}} = \frac{5}{3}$ ，試求 \overline{CE} 的長及 $\triangle ABC$ 的面積。

高雄市第四屆青少年數學國際城市邀請賽
對際競賽試題

時間：一 小 時 每大題各 20 分,共 60 分

校名：_____ 國中 姓名：_____

第一題：

1. 設有三個沒有刻度的容器,其容量分別為 3 公升, 5 公升, 8 公升, 現在只有 8 公升容器中已裝滿了純水,請利用這三個容器進行操作(可以將一個容器中的純水倒到另一個或二個容器中), 是否可以使得其中某一個容器中的純水恰為 4 公升?如果可以, 請列出操作過程並說明之。如果不可以,請說明理由。
2. 承上題(只有 8 公升容器中裝滿了純水), 試運用上述三個容器能否量出 1 至 8 公升的各個容量, 請分別寫出可以量出和無法量出的容量。

第二題: 桌上有 20 張卡片,這 20 張卡片分別編號為 $1, 2, \dots, 20$, 試將這 20 張卡片分成 6 堆,使得每堆中的卡片號碼之和都是一個完全平方數,但每一堆卡片號碼之和都不相同 (這 6 堆中每堆至少有一張卡片,且 20 張卡片中的每一張需在這 6 堆中的某一堆)。請分別列出這 6 堆中的卡片號碼。