

高雄市青少年數學國際城市邀請賽
高雄市代表隊選拔賽初試
個人筆試試題

時間：二小時

第一部分、填充題共十二小題，每小題 5 分（請將各題正確的答案寫在答案卷對應題號的空格內，不必列出過程。）

1. 設 n 為一整數，若

$$n < \frac{1}{100} + \frac{1}{101} + \frac{1}{102} + \cdots + \frac{1}{300} < n + 1,$$

則 $n =$ _____。

2. 用 7 除 $(3^{10} + 2^{10})^{100}$ 得到餘數為_____。
3. 有一正方形其邊長為 2 公尺，今將其四角截去使成爲一正八邊形，則此正八邊形每邊之長爲_____公尺。
4. 若一等差級數 $20 + 18\frac{3}{4} + 17\frac{1}{2} + \cdots$ 到第 m 項的和是負數，則 m 至少應爲_____。
5. 某城市有人口 180 萬人，若每年人口增加 20%，如果經過 x 年後人口就會超過 300 萬人，則 x 至少應爲_____。
6. 某地區有候選人 8 位登記參加有選民 1000000 人的競選，該地區欲選出 5 位立法委員，則鐵定能當選立法委員者至少需獲得的票數爲_____。
7. 設有一腳踏車的前輪周長爲 3 公尺，後輪周長爲 2 公尺。當此腳踏車騎過 3 公里之後，則後輪比前輪多轉的次數爲_____。
8. 已知一圓通過邊長爲 $7\frac{1}{2}$, 10, $12\frac{1}{2}$ 的三角形之三頂點，則此圓的半徑爲_____。
9. 如果三個相異正整數之和是 370，試問滿足此條件之三數的最小公倍數中最小者爲_____。

10. 若 a, b 為正實數，我們定義運算 $a * b$ 如下

$$a * b = \frac{ab}{a + b},$$

則 $4 * (4 * 4) =$ _____。

11. 如下圖，圖中最小的三角形邊長為 **1**，則圖中所有大小不同之三角形的周長之和為_____。

12. 編號 **1** 至 **100** 的杯子依序排成一列，今先將所有杯子開口朝上站立著，再將編號為 **2** 的倍數的杯子翻轉倒立開口朝下，再將編號為 **3** 的倍數的杯子翻轉，依此方式按 **4** 的倍數，**5** 的倍數， \dots 進行到最後，則最後杯口朝上站立的杯子數目為_____。

第二部分、計算證明題共三題（請寫在答案卷對應題號內，須詳列出計算證明過程）

1. 試將長和寬分別為 **27** 與 **12** 的矩形分成兩部份，使它們可以拼成一個正方形。（須列出分割痕跡及拼成正方形的過程）
2. 已知正方形 $ABCD$ 及其內部的一點 P ，使得 $\angle PAC = \angle PCB = 20^\circ$ ，試求 $\angle ADP$ 。
3. 已知一正立方體，如果將八個頂點分別用數 **1** 或 **-1** 來表示；正方體有六個面及十二條邊，如果每一條邊以它的兩個端點的數之乘積表示，每一面以它的四個頂點的數之乘積表示；例如正方形 $ABCD$ 為它的一面，且設頂點 A, B, C, D 分別以數 **1, -1, -1, 1** 表之，則邊 AB 和正方形 $ABCD$ 分別以數 **-1** 及 **1** 表示。試問是否有可能使十二條邊和六個面所代表的 **18** 個數之和為 **0**？如果你認為可能，請標示出各個頂點所代表的數；如果不可能，則證明之。

高雄市青少年數學國際城市邀請賽
高雄市代表隊選拔賽初試
隊際活動賽試題

校名：_____ 國中 姓名：_____

競賽規則：(1).隊員間可輕聲互相討論。

(2).經由監考人員許可中途可上廁所，但不得與他人交談。

(3).考試結束後所有材料、用品、試題不得攜出考場。

(4).請將答案寫在試題紙上。

第一題、我們用一些邊長為 **1** 的正方形來構造下列各種圖形：

(1)

(2)

(3)

(4)

1. 仿照上面的說明，請列出所有不同形狀之五方塊的圖形（注意：兩個正方形如果相交，則必須有一邊重疊但不能只交於一點或邊的一部分。）

2.

3.

4.

5.

6.

第二題、 試回答下列各小題並寫出畫該直線之理由及過程：

1. 如圖 (1) 所示，試利用一條直線將此三個圓分成兩個相等部份，並至少列出兩種不同分割的方法。

2. 如圖 (2) 所示，試利用一條直線將此五個圓分成兩個相等部份，並至少列出四種不同分割的方法。

3. 如圖 (3) 所示，試利用一條直線將此七個圓分成兩個相等部份，並至少列出四種不同分割的方法。