

高雄市第二屆青少年數學國際城市邀請賽  
國際數學競賽（一）

時間：二 小 時

第一部分：填充題，第一題至第十題每小題 5 分，第十一題 10 分

（請將各題正確的答案寫在答案卷對應題號的空格內。）

1.  $17^{2000}$  的個位數字為 \_\_\_\_\_。
2. 從  $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{9} + \frac{1}{12} + \frac{1}{15} + \frac{1}{18}$  必須去掉兩項，使得餘下各項的和等於  $\frac{2}{3}$ ，則所去掉的兩項的積為 \_\_\_\_\_。
3. 如圖， $\triangle ABC$  中， $\overline{AC} = \overline{CD}$  且  $\angle CBA - \angle ABC = 45^\circ$ ，則  $\angle BAD =$  \_\_\_\_\_。
4. 設  $a, b$  為實數，規定運算  $a \star b = (a + 2) \cdot (2 - b)$ ，則  $(3 \star 4) \star 5 =$  \_\_\_\_\_。
5. 設  $A$  為小於 1000 且大於 100 的奇數，若  $A$  的百位數字大於它的個位數字，且  $A$  是 11 的倍數，則滿足這些條件的所有可能正奇數中最小者為 \_\_\_\_\_。
6. 將 150 與 650 之間除以 10 餘 4 的整數全部相加的和為 \_\_\_\_\_ 組解法。
7. 內接於半圓的正方形之面積與內接於一個完整的圓的正方形之面積的比為 \_\_\_\_\_。（已知半圓與完整的圓的半徑相等）
8. 著名的 Goldbach 猜測是：對於任一個大於 7 的偶數一定可以等於兩個不同質數的和，我們希望找到不同的質數  $p, q$  使得  $p + q = 192$ ，並讓  $2p - q$  越大越好，則數對  $(p, q) =$  \_\_\_\_\_。
9. 若  $A = \left( \frac{-4a}{3+a} - \frac{\sqrt{2-|a|} + \sqrt{|a|-2}}{2-a} \right)^{2000}$  為整數，其中  $a$  為實數，則  $A$  的個位數字是 \_\_\_\_\_。
10. 用 100 元兌換成面值 1 元、5 元、10 元和 50 元硬幣若干個，則有 \_\_\_\_\_ 種不同的兌換方法。

11. 已知圓內有兩條互相垂直之弦，若其中一弦被分成兩線段長為  $a$  與  $b$ ，另一條弦被分成兩線段長為  $c$  與  $d$ ，其中  $a, b, c, d$  皆為正數，則此圓之直徑為 \_\_\_\_\_。（以  $a, b, c, d$  表之）

高雄市第二屆青少年數學國際城市邀請賽  
國際數學競賽（二）

第二部分：計算證明，每小題 15 分（注意：須詳列過程及說明理由）

1. 已知一個八邊形  $ABCDEFGH$ （頂點依順時針方向分別為  $A, B, C, D, E, F, G, H$ ），如果此八邊形的八個內角都相等，且邊長  $\overline{AB} = 5, \overline{BC} = 2\sqrt{2}, \overline{CD} = 1, \overline{DE} = 3\sqrt{2}, \overline{EF} = 2, \overline{FG} = 3\sqrt{2}$ ，試求此八邊形的周長。
2. 已知兩正方形的邊長分別為 4 公分和 2 公分，
  - (1). 試問如何將此二正方形作適當的切割後重拼成一個大正方形？並求此大正方形的邊長。
  - (2). 試問如何將邊長為 4 公分的正方形切割成四塊，再與邊長為 2 公分的正方形來拼在一起，使這五塊圖形組成一個大正方形？
3. 有一個半徑為 2 公分的大圓和若干個半徑為 1 公分的小圓，現在要用這些小圓  $n$  個可將大圓的圖形完全蓋住，則  $n$  值最小為 \_\_\_\_\_。
4. 如圖，有八個格子，其中格子  $d, f$  和  $h$  中各放有一顆棋子。甲、乙兩人輪流移動棋子，規則如下：
  - (1). 每顆棋子移動的方向都是向上，不可向下。
  - (2). 每次只能移動一顆棋子，
    - (a) 若棋子的正上方之一格是空的，則可以把棋子向上移動一格；
    - (b) 若棋子的上一格已有棋子，但是上面第二格是空的，則可以把棋子跳過上一格而移動至上面第二格的格子內；
    - (c) 若棋子的上一格、上面第二格都有棋子，則可以把棋子跳過上面第一、二格而移動至上面第三格的格子內；誰能將其中的一顆棋子移至格子  $a$  中就是贏家。若甲、乙兩人都完全瞭解玩這種棋獲勝的技巧，由甲先移動棋子，試問誰是贏家？策略是如何？
3. 如圖， $ABCDEFGH$  是邊長為 2 公分的正方體，點  $M, N, P, Q$  分別為邊  $\overline{BC}, \overline{CD}, \overline{HE}$ ，與  $\overline{EF}$  的中點，試求四邊形  $MNPQ$  的面積。

4. 用  $1, 2, 3, \dots, 9$  這九個數字組成一個四位數，一個三位數與一個兩位數，每個數字只允許用一次，使這三個數的和是 **2700**，試問共有幾種組合方法？