PIWYMIC 代表隊選拔初試試題

校名：＿＿＿＿＿＿ 年級：＿＿ 編號：＿＿＿＿ 姓名：＿＿＿＿＿＿

第一部份：填充題共十二小題，每小題 5 分（請將各題正確的答案寫在空格內，不必列出過程）

1. $322^{727}+727^{322}$ 的個位數爲＿＿＿＿＿＿＿＿＿。

2. 設 x 爲介於 200 與 400 之間的整數，分別以 5、9 及 12 除 x，其所得餘數依次爲 4、8 及 11。 則 $x=$＿＿＿＿＿＿＿＿＿。

3. 當 n!表示爲正整數 1,2,…,n 的相乘，例如 3!=1×2×3；4!=1×2×3×4。若 a 是 0,1,2,…,9 中某個數字，且當 15!=130767a368000 時，則 a =＿＿＿＿。

4. 設 $m=(1-\frac{1}{3^2})(1-\frac{1}{4^2})(1-\frac{1}{5^2})...(1-\frac{1}{2001^2})$，若將 m 化簡成最簡分數形式如 $\frac{q}{p}$，其中 p、q 爲互質的正整數，請問 $p+q$=＿＿＿＿＿＿＿＿＿。

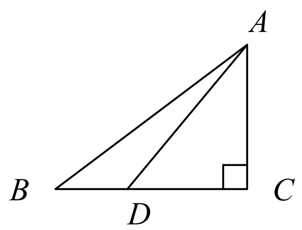
5. 計算$(66.66)^2+27.78\times200.02$ 的結果爲＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿。

6. 有一數列 $a_1,a_2,\ldots,a_{100}$，其首項 $a_1=0$，且 n≧1，對於任一項 a_{n+1} 滿足下列條件：

$$a_{n+1}=\begin{cases}1\text{，當 } a_n=0\text{，且 n 爲奇數}\\0\text{，當 } a_n=0\text{，且 n 爲偶數}\\1\text{，當 } a_n=1\text{，且 n 爲奇數}\\2\text{，當 } a_n=1\text{，且 n 爲偶數}\\0\text{，當 } a_n=2\end{cases}$$

則數列 $a_1,a_2,\ldots,a_{100}$ 中等於 2 的項數共有＿＿＿＿＿＿個。

7. 如下圖，∠ACB=90 °，∠ADC=45 °，∠ABC=30 °，若 $\overline{BD}$=1，則 $\overline{CD}$=＿＿＿。



8. 設 D 爲定義在整數集合上的一個函數，滿足下列三條件：

（1） $D(1)=0$

（2） 當 P 是質數時，$D(P)=1$

（3） 對於任意兩個正整數 u, v, 恆有 $D(uv)=uD(v)+vD(u)$

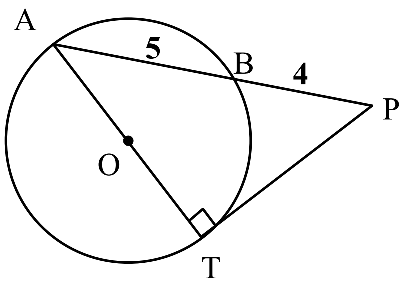
則 $D(2002)$之值爲________________________。

9. 有一個四位數等於三個連續奇數的平方和，且爲 1111 的倍數，

則此四位數爲______________。

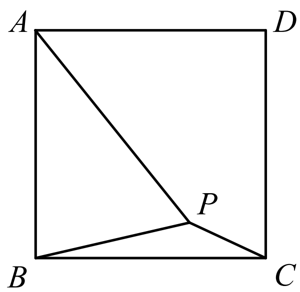
10. 若 1 到 100,000 中有 k 個數是完全立方，而且又是 17 的倍數，則 $k=$________。

11. 下圖中，O 爲圓心，$\overline{AT}$爲直徑，B 爲圓周上異於 A、T 之一點，P 爲圓外一點，且 A、B、P 在一直線上，$\overline{PT}\perp\overline{AT}$。若 $\overline{AB}=5$，$\overline{BP}=4$，則$\overline{OP}$ 之長爲_____________。



12. 下圖中，P 是正方形 $ABCD$ 內的一點，已知$\overline{CP}=1$，$\overline{BP}=2$，$\overline{AP}=3$，

則正方形 $ABCD$ 的面積爲___________________。



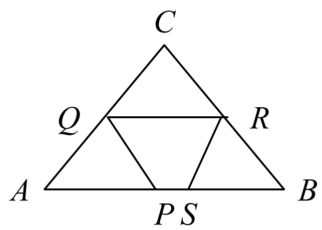
PIWYMIC 代表隊選拔初試試題

校名：___________ 年級：____ 編號：_______ 姓名：__________

第二部分：每題 8 分，共 5 題

1. 將 0,1,2,…,9 十個數字全部分成不重複五組，每組兩個排成一個二位數（註：0 在十位數時不算二位數），此十個數字可排成五個二位數，在各種排列當中令這五個二位數之和的最大可能値爲 a；經重新排列後，這五個二位數之和是奇數的最大可能値爲 b，則 $a-b$ 之值爲__________________。

2. 下圖中，$\triangle ABC$ 是邊長爲 1 的正三角形，已知 $\overline{PQ}\,//\,\overline{BC}$，$\overline{QR}\,//\,\overline{AB}$ 且 $\overline{RS}\,//\,\overline{CA}$，若 $\overline{RQ}=\dfrac{5}{2}\overline{PQ}$ ，則 $\overline{PQ}+\overline{QR}+\overline{RS}=$______________________。



3. 從 1 到 100 中有幾個整數 n 滿足 n^3+47 是 24 的倍數？請列出這些整數。

4. 設 a,b,c 和 d 爲任意四個相異實數，試求 $(1+ab)^2+(1+cd)^2+(ab)^2+(cd)^2$ 之最小值，並證明之。

5. 下圖中，長方形 $PQRS$ 內接於長方形 $ABCD$，其中 $\overline{DR}=3$，$\overline{RP}=13$，$\overline{PA}=8$，試求長方形 $ABCD$ 的面積，並說明你的理由。