

高雄市第二屆青少年數學國際城市邀請賽
國際數學競賽（一）

時間：二 小 時三十分

第一部分：填充題，第一題至第十題每小題 5 分，第十一題 10 分

（請將各題正確的答案寫在答案卷對應題號的空格內。）

1. 設 m 與 n 為方程式 $x^2 + mx + n = 0$ 的二根，其中 $m \neq 0, n \neq 0$ ，則方程式 $x^2 + mx + n = 0$ 的兩根中最大者為 _____。
2. 已知 $24 \cdot X$ 是完全平方數，且 $126 \cdot X^2$ 是完全立方數，其中 X 是正整數，則所有可能的 X 值中最小者為 _____。
3. 設 a, b, c 為整數， $a \neq 0$ 且 $a \neq c$ ，若把分數 $\frac{b}{a}$ 的分子與分母同時加上 x 後，分數的值變成 $\frac{a}{c}$ ，則 $x =$ _____。（以 a, b, c 表之）
4. 設 $(2^{48} - 1)$ 恰可被兩個介於 60 與 70 之間的正整數所整除，則此兩正整數中最大者為_____。
5. 設 a_n 表示 3^n 的個位數字，則 $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{2000}$ 的值為 _____。
6. 用 1, 2, 3, ..., 9 這九個數字去構造若干個質數，每個數字都要用且只能用一次，那麼共有_____組解法。
7. 已知一等腰三角形的底邊長為 6, 若此三角形的兩腰上的中線互相垂直，則此等腰三角形的面積為 _____。
8. 已知 $S = \frac{1}{1980} + \frac{1}{1981} + \cdots + \frac{1}{2000}$ ，則 $\frac{1}{S}$ 的整數部分為 _____。
9. 若 $A = \left(\frac{-4a}{3+a} - \frac{\sqrt{2-|a|} + \sqrt{|a|-2}}{2-a} \right)^{2000}$ 為整數，其中 a 為實數，則 A 的個位數字是_____。
10. 用 100 元兌換成面值 1 元、5 元、10 元和 50 元硬幣若干個，則有 _____ 種不同的兌換方法。
11. 已知圓內有兩條互相垂直之弦，若其中一弦被分成兩線段長為 a 與 b ，另一條弦被分成兩線段長為 c 與 d ，其中 a, b, c, d 皆為正數，則此圓之直徑為 _____。（以 a, b, c, d 表之）

高雄市第二屆青少年數學國際城市邀請賽
國際數學競賽（二）

第二部分：計算證明，每小題 **15** 分（注意：須詳列過程及說明理由）

- 1.
- 2.
- 3.
4. 如圖，有八個格子，其中格子 **d, f** 和 **h** 中各放有一顆棋子。甲、乙兩人輪流移動棋子，規則如下：
 - (1). 每顆棋子移動的方向都是向上，不可向下。
 - (2). 每次只能移動一顆棋子，
 - (a) 若棋子的正上方之一格是空的，則可以把棋子向上移動一格；
 - (b) 若棋子的上一格已有棋子，但是上面第二格是空的，則可以把棋子跳過上一格而移動至上面第二格的格子內；
 - (c) 若棋子的上一格、上面第二格都有棋子，則可以把棋子跳過上面第一、二格而移動至上面第三格的格子內；

誰能將其中的一顆棋子移至格子 **a** 中就是贏家。若甲、乙兩人都完全瞭解玩這種棋獲勝的技巧，由甲先移動棋子，試問誰是贏家？策略是如何？
3. 如圖，**ABCDEFGH** 是邊長為 **2** 公分的正方體，點 **M, N, P, Q** 分別為邊 **BC, CD, HE**，與 **EF** 的中點，試求四邊形 **MNPQ** 的面積。
4. 用 **1, 2, 3, …, 9** 這九個數字組成一個四位數，一個三位數與一個兩位數，每個數字只允許用一次，使這三個數的和是 **2700**，試問共有幾種組合方法？