

高雄市第四屆青少年數學國際城市邀請賽  
個人數學競賽試題

時間: 二小時

第一部分: 填充題, 每小題 5 分, 共 60 分

(請將各題正確的答案寫在答案卷對應題號的空格內。)

1. 設一正整數  $a$  除以 6 餘 5, 則  $a^2$  除以 12 的餘數為 \_\_\_\_\_。
2. 設有一路燈距地面的高度為 4 公尺, 已知創創的身高為 150 公分, 某天晚上他站在路燈前方, 其影長為 6 公尺, 如果創創再向前走  $x$  公尺, 其影長加倍, 此時  $x$  之值為 \_\_\_\_\_。
3. 如果一個五位數中恰好有兩個數字相同的數, 我們稱該五位數為「好數」, 例如: 12234, 12423 都是「好數」, 但 42234 及 43144 都不是「好數」, 則所有五位數中萬位數字是 4 的「好數」共有 \_\_\_\_\_ 個。
4. 如下圖, 長方形 ABCD 是由三個大小相同的正方形所組成, 點 E, F 在  $\overline{BC}$  上, 則  $\angle AFE + \angle ACE =$  \_\_\_\_\_。
5. 從 11 到 13 的數字和為  $(1+1) + (1+2) + (1+3) = 9$ , 那麼從 1 到 1000 的所有數字之和為 \_\_\_\_\_。
6. 設  $a, b, c$  為三個相異的質數, 若  $a \times b^b \times c + b = 2001$ , 則  $ac + b =$  \_\_\_\_\_。
7. 計算  $2002^2 - 2001^2 + 2000^2 - 1999^2 + \cdots + 2^2 - 1$  之值為 \_\_\_\_\_。
8. 設  $N = 122333444455555666666777777888888999999999$ , 則  $N$  除以 9 的餘數為 \_\_\_\_\_。
9. 周長相等的正三角形和正六邊形的面積值之比為 \_\_\_\_\_。
10. 滿足  $5x + 3y = 143$  的正整數解  $(x, y)$  共有 \_\_\_\_\_ 組。
11. 如下圖, 大圓與小圓為同心圓, 正三角形 ABC 的三個頂點都在大圓之圓周上, 且其為小圓的外切三角形, 若正三角形 ABC 的邊長為 8 公分, 則此大圓與小圓之間所組成的圓環部分的面積為 \_\_\_\_\_ 平方公分。

12. 下圖中, 頂點朝上的正三角形 (形狀如右者  $\triangle$ ) 共有 \_\_\_\_\_ 個。

第二部分: 計算證明, 每題 20 分, 共 60 分

(注意: 在答案卷上請依題號作答, 須詳列過程及說明理由)

1. 設  $a, b, c$  為 1 至 9 這九個數中的三個相異整數, 由  $a, b, c$  這三個數字可以組成 6 個不同的三位數 (例如  $bca$  表示以  $b$  為百位數字,  $c$  為十位數字,  $a$  為個位數字的三位數)。如果將這 6 個三位數中最大的減去最小的三位數, 其所得的差仍然是當中的一個三位數 (即由  $a, b, c$  所組成的一個三位數), 試分別求出  $a, b, c$  的值。
2. 有一本書的頁碼是從 1 到  $n$ , 其中  $n$  為正整數, 把所有這些頁碼相加, 在相加過程中有一頁碼不小心被加了兩次, 結果得到不正確的結果, 其和是 2111, 試問這個加了兩次的頁碼是那一個數?
3. 如圖,  $\triangle ABC$  的三邊長分別為  $\overline{BC} = a$ ,  $\overline{CA} = b$  及  $\overline{AB} = c$ ,  $D$  是  $\overline{AB}$  上的一點, 過  $D$  作  $\overline{DE} \parallel \overline{AC}$  交  $\overline{BC}$  於  $E$  點, 過  $E$  作  $\overline{EF} \perp \overline{AB}$  交  $\overline{AB}$  於  $F$  點。如果一元二次方程式  $x^2 - (a+b)^2x + 2a(b + \frac{c^2}{2a}) = 0$  的二根和與二根之乘積相等,
  - (1). 試證:  $\triangle ABC$  為直角三角形。
  - (2). 若  $\overline{DF} = 3$ ,  $\overline{BD} = 12$ , 且  $\frac{\overline{CD}}{\overline{CE}} = \frac{5}{3}$ , 試求  $\overline{CE}$  的長及  $\triangle ABC$  的面積。

高雄市第四屆青少年數學國際城市邀請賽  
對際競賽試題

時間: 一小時 每大題各 20 分, 共 60 分

校名: \_\_\_\_\_ 國中 姓名: \_\_\_\_\_

第一題:

1. 設有三個沒有刻度的容器, 其容量分別為 3 公升, 5 公升, 8 公升, 現在只有 8 公升容器中已裝滿了純水, 請利用這三個容器進行操作 ( 可以將一個容器中的純水倒到另一個或二個容器中), 是否可以使得其中某一個容器中的純水恰為 4 公升? 如果可以, 請列出操作過程並說明之。如果不可以, 請說明理由。
2. 承上題 (只有 8 公升容器中裝滿了純水), 試運用上述三個容器能否量出 1 至 8 公升的各個容量, 請分別寫出可以量出和無法量出的容量。

第二題: 桌上有 20 張卡片, 這 20 張卡片分別編號為  $1, 2, \dots, 20$ , 試將這 20 張卡片分成 6 堆, 使得每堆中的卡片號碼之和都是一個完全平方數, 但每一堆卡片號碼之和都不相同 (這 6 堆中每堆至少有一張卡片, 且 20 張卡片中的每一張需在這 6 堆中的某一堆)。請分別列出這 6 堆中的卡片號碼。