

高雄市青少年數學國際城市邀請賽
國內選拔競賽
個人筆試試題

時間：二 小 時

第一部分、填充題共十二小題，每小題 **5** 分（請將各題正確的答案寫在答案卷對應題號的空格內，不必列出過程。）

1. 1997^{1999} 的個位數字為 _____。
2. 設有一正數 x 可表為 $a + b\sqrt{5}$ ，其中 a, b 為整數。若 $x^2 = 49 + 12\sqrt{5}$ ，則 $2a + b =$ _____。
3. 設 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{1999}$ 為一連續遞增的整數所成數列之前 **1999** 項。已知

$$a_1 + a_{19} + a_{199} + a_{1999} = 2606,$$

則 $a_{1999} =$ _____。

4. 有五個相異整數由大到小排列依次為 **a, b, c, d, e**。已知這五數的平均為 **33**，較大的四數之平均為 **34**，較小的四數之平均為 **31**，又中間的數 **c** 為偶數，則最大數 **a** = _____。
5. 介於 $\sqrt[3]{999}$ 與 $\sqrt{999}$ 之間的整數個數為_____。
6. 下圖表示蜂巢的平面圖，第一層只有一個正六邊形 **ABCDEF**，第二層有六個正六邊形，依此排列下去，若此蜂巢由十層的正六邊形所組成，則頂點的總數為_____。

7. 在直角坐標平面的第一象限中，把坐標都是整數的點依下列方式編序：

第 1 點爲 (0,0)	第 5 點爲 (0,2)	第 9 點爲 (2,0)
第 2 點爲 (1,0)	第 6 點爲 (1,2)	第 10 點爲 (3,0)
第 3 點爲 (1,1)	第 7 點爲 (2,2)	⋮
第 4 點爲 (0,1)	第 8 點爲 (2,1)	⋮

依下圖箭頭之順序，則第 1999 點的坐標爲 _____。

8. 自 1 至 1999 的所有 1999 個正整數中取出 n 個數來，使得這 n 個正整數中任意兩個相異數的差不是質數，則 n 的最大值 = _____。
9. 若有十個正整數的總和是 2002，則這十個正整數的最大公因數之中可能取的最大值是_____。
10. 若邊長爲整數的正方形可被切割成 25 個小正方形，其中正好有 24 個小正方形的面積相等，則原來的大正方形之面積最大值爲 _____平方單位。
11. 小華有五十元硬幣、十元硬幣及五元硬幣各若干個，如果十元硬幣的個數之 10 倍減去五元硬幣的個數再減去 4，再將結果乘以 10，正好比這三種硬幣個數之總和多 4 個。若是這三種硬幣的個數都是質數，則小華有_____ 個五元硬幣。
12. 已知長方形 ABCD 的長和寬分別爲 6 與 8 單位長，今由 AB 邊中點出發先通過AD 邊上之一點，再過 CD 邊上某一點，最後抵達 BC 邊上之中點，則此路徑之最短距離爲 _____。

第二部分、計算證明題共三題（請寫在答案卷對應題號內，須詳列出計算證明過程）

1. 試解下列聯立方程組

$$\begin{cases} xy - 17 = x + y \\ yz - 27 = y + z \\ zx - 13 = x + z \end{cases}$$

的所有實數解。

2. 試問是否可能構造出一個凸六邊形，使得它的所有內角都相等且六邊的邊長必須分別是**1, 2, 3, 4, 5, 6**？若沒有這種六邊形，請說明理由；若有可能，請構造出這種六邊形並說明理由。
3. 在一直線上選取 **88** 個點，且將每個點塗上紅色或藍色。設兩個連續點之間的線段依下列規定塗色：
- (1). 若線段的兩端點皆為紅色，則此線段塗紅色。
 - (2). 若線段的兩端點皆為藍色，則此線段塗藍色。
 - (3). 若線段的兩端點顏色不同，則此線段塗黑色。

今已知恰有 **10** 條黑色線段且第一點為紅色，試問最後一點是什麼顏色？並討論你的解答。

高雄市青少年數學國際城市邀請賽
國內選拔競賽
隊際活動賽試題

校名：_____ 國中 姓名：_____

競賽規則：(1).隊員間可輕聲互相討論。

(2).經由監考人員許可中途可上廁所，但不得與他人交談。

(3).考試結束後所有材料、用品、試題不得攜出考場。

(4).請將答案寫在試題紙上。

第一題、我們用一些邊長為 **1** 的正方形來構造下列各種圖形：

(1)

(2)

(3)

(4)

(5)

- a. 仿照上面的說明，請列出所有不同形狀之六方塊的圖形（注意：兩個正方形如果相交，則必須有一邊重疊但不能只交於一點或邊的一部分。如果一圖形經過平移旋轉及翻面可得到另一圖形時，這兩個圖形只能算一種形狀。）

- b. 在這些六方塊中，請指出那些圖形可以折疊拼成正立方體，說明理由。則必須有一邊重疊但不能只交於一點或邊的一部分。）

第二題、 1.試利用下列材料：

硬紙板 2 張、白紙（答案紙） 12 張、綠色黃色及紅色紙各 6 張、剪刀、美工刀、膠水、切割板、橡皮擦、附有圖形之紙等，剪下每張綠色黃色及紅色紙上的七種圖板（稱為 七圖板）。（留一張紅色紙）

2.請將剩下未剪的一張紅色紙黏在硬紙板上並剪成一組七圖板，以便操作回答下列問題。

- a. 請將一組綠色七圖板排成一個正方形並黏在答案紙上。
- b. 請利用六組黃色七圖板依所附圖形排出六種不同形狀的圖形並黏在答案紙上須說明拼圖過程及理由。
- c. 足除上面的圖形外，你能夠自行拼成其它圖形嗎？請利用綠色七圖板排出各種不同形狀的圖形並黏在答案紙上須說明拼圖過程、圖形形狀及理由。（最多拼成六種）

第三題、 已知有下列材料：

白紙（答案紙） **12** 張、綠色及紅色紙各 **6** 張、剪刀、美工刀、膠水、切割板、橡皮擦等。

- a. 請分別用綠色及紅色紙製作兩股分別為 **1** 公分與 **2** 公分的直角三角形若干個。
- b. 試問至少需用多少個綠色的直角三角形方可拼成一個正方形？請黏在答案紙上並須說明理由。
- c. 試問是否能用 **20** 個紅色的直角三角形拼成一個正方形？若不能，須說明理由；若可以拼成正方形，須拼成正方形黏在紙上並說明理由。

第四題、 試利用下列材料：

紅色紙 **3** 張、剪刀、美工刀、膠水、切割板、橡皮擦、直尺、白紙 **3** 張；在白紙上畫出長和寬分別為 **27** 公分與 **12** 公分的長方形來，並試將此長方形分成兩部份後剪下來，再把它們拼成一個正方形並黏在紅色紙上。（須有作圖痕跡並說明理由）

第五題、 如下圖所示，請作一直線將此 **L** 形分成面積相等的兩部份，至少用兩種不同的方法並說明理由。（超過兩種不同作法時，每多作一種不同作法可加分。）