# 2009 年青少年數學國際城市邀請賽

## 參賽代表遴選決賽

## 個人數學競賽試題

編號:__________校名:______________ 國中 姓名:______________ 性別:☐男; ☐女

作答時間: 二 小 時

### 第一部分：填充題，每小題 5 分，共 60 分

(注意：請將答案直接填入各題預留空白處，不須列出計算過程。)

1. 已知 $n$ 為正整數，且 $3n$ 恰有 5 個正因數，則 $10n$ 的正因數個數共有__________個。

因 $3n$ 的正因數個數為 5 而 5 是質數，故 $3n=p^4$ 為的型態，其中 $p$ 是質數，故 $n=3^3$，所以 $10n=2\times5\times3^3$，因此 $10n$ 的正因數個數有 $2\times2\times4=16$ 個。

ANS：16 個

2. 已知 $a,\ b$ 為正整數且滿足 $\begin{cases} ab+a+b=51 \\ a^3b+ab^3=5508 \end{cases}$，則 $a^2+b^2=$______ 。

可設 $a<b$。$ab+a+b=51 \Rightarrow (a+1)(b+1)=52=2\times26=4\times13$，故$(a,\ b)$=(1, 25)或(3, 12)。因 $5508=a^3b+ab^3=ab(a^2+b^2)$，所以 $ab$ 必須是 5508 的因數，故$(a, b)$=(1, 25)，不合，故$(a, b)$=( 3, 12)且 $a^2+b^2=9+144=153$。

ANS：153

3. $\sqrt{1+\dfrac{4\times2^2}{(2^2-1)^2}}+\sqrt{1+\dfrac{4\times3^2}{(3^2-1)^2}}+\sqrt{1+\dfrac{4\times4^2}{(4^2-1)^2}}+\cdots\cdots\cdots+\sqrt{1+\dfrac{4\times20^2}{(20^2-1)^2}}=$______ 。

因 $\sqrt{1+\dfrac{4a^2}{(a^2-1)^2}}=\sqrt{\dfrac{(a^2-1)^2+4a^2}{(a^2-1)^2}}=\sqrt{\dfrac{(a^2+1)^2}{(a^2-1)^2}}=\dfrac{(a^2+1)}{(a^2-1)}$，故

$$\sqrt{1+\frac{4\times2^2}{(2^2-1)^2}}+\sqrt{1+\frac{4\times3^2}{(3^2-1)^2}}+\sqrt{1+\frac{4\times4^2}{(4^2-1)^2}}+\cdots\cdots\cdots+\sqrt{1+\frac{4\times20^2}{(20^2-1)^2}}$$

$$=\frac{2^2+1}{2^2-1}+\frac{3^2+1}{3^2-1}+\frac{4^2+1}{4^2-1}+\cdots+\frac{20^2+1}{20^2-1}$$

$$=1+\frac{2}{2^2-1}+1+\frac{2}{3^2-1}+1+\frac{2}{4^2-1}+\cdots+1+\frac{2}{20^2-1}$$

$$=19+2\left(\frac{1}{(2+1)(2-1)}+\frac{1}{(3+1)(3-1)}+\frac{1}{(4+1)(4-1)}+\cdots+\frac{1}{(20+1)(20-1)}\right)$$

$$=19+2\times\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2-1}-\frac{1}{2+1}+\frac{1}{3-1}-\frac{1}{3+1}+\frac{1}{4-1}-\frac{1}{4+1}+\cdots+\frac{1}{19-1}-\frac{1}{19+1}+\frac{1}{20-1}-\frac{1}{20+1}\right)$$

$$=19+\left(-\cancel{\frac{1}{3}}+\frac{1}{1}-\cancel{\frac{1}{4}}+\frac{1}{2}-\cancel{\frac{1}{5}}+\cancel{\frac{1}{3}}-\cdots-\frac{1}{20}+\cancel{\frac{1}{18}}-\frac{1}{21}+\cancel{\frac{1}{19}}\right)=19+1+\frac{1}{2}-\frac{1}{20}-\frac{1}{21}=20\frac{169}{420}$$

ANS：$20\dfrac{169}{420}$

4. 已知正整數$n$的四次方恰有六個數碼，而這六個數碼包含 0, 1, 4, 6, 7, 9 各一個，則該正整數$n$ = ___________。

該正整數 $n$ 的四次方為六位數，故知$104679 \le n^4 \le 976410$，故$18 \le n \le 31$；
因 $n$ 的六個數碼 0、1、4、6、7、9 之和為 3 的倍數，故 $n$ 為 3 的倍數；
因此 $n$ 的可能值為 18、21、24 或 27。
因$18^4=104976$、$21^4=194481$、$24^4=331776$、$27^4=531441$，所以 $n$=18。

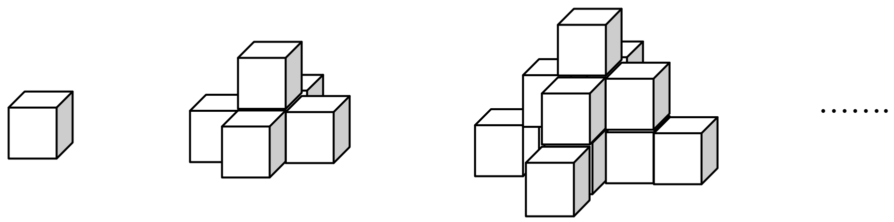
ANS：18

5. 已知$n$為正整數，如果$n$正好等於它的數碼和的 30 倍，則滿足這樣條件的$n$之最小值為___________。

因 $n$ 為 30 的倍數，故不可為一位數；
若 $n$ 是二位數$\overline{ab}$，則由題設可得$30(a+b)=10a+b$，即$20a+29b=0$，此式只有 $a$=$b$=0 之解，故不合；
若 $n$ 是三位數$\overline{abc}$，則由題設可得$30(a+b+c)=100a+10b+c$，即$20b+29c=70a$，因$0 \le c \le 9$，故 $c$ 必為 0。此時$20b=70a$，即 $a$= 2，$b$=7，因此三位數僅 270 符合題意；
若 $n$ 是四位數$\overline{abcd}$，則由題設可得
$30(a+b+c+d) \le 30(9+9+9+9)=1080<9999$，故不合；同理，五位數以上的情況也不存在。故僅 270 符合題意。

ANS：270

6. 以下圖(1)是由一個正立方體構造而成的；圖(2)是由 6 個相同的正立方體構造而成的；圖(3)是由 15 個相同的立方體構造而成的。按照此規律繼續構造下去，則在圖(100)所構造的形體中，正立方體的數量總共有_______個。

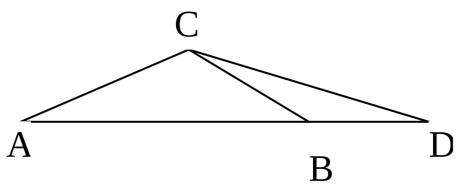


圖(1)　圖(2)　圖(3)　………　圖(100)

由排列規則可知第 $n$ 圖除了中心部份，東、西、南、北四個方向的正立方體個數各為$1+2+3+\cdots+99=\dfrac{(1+99)\times 99}{2}=4950$，故
所以圖(100)的個數為 4950×4+100=19900。

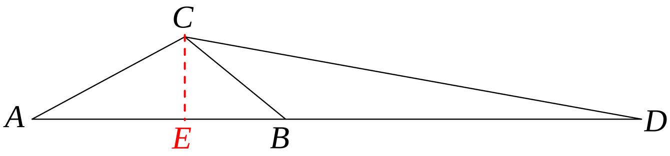
ANS：19900

7. 在下圖$\triangle ABC$中，$\overline{AB}=\dfrac{5}{2}$，$\overline{AC}=\sqrt{3}$，$\angle CAD=\angle DCB=30^\circ$，則$\triangle DCB$之面積為 _________。



如圖，作 $CE\perp AB$ 交 $AB$ 於 $E$ 點、在 $BC$ 延長線上取 $F$ 使得 $BF\perp DF$，則 $\triangle DCB$ 面積為 $\frac{1}{2}\times BC\times DF$。因 $\angle CAD=30°$，故知 $CE=\frac{1}{2}AC=\frac{1}{2}\sqrt{3}$，$AE=\frac{3}{2}$，$EB=AB-AE=1$，故可算出 $BC=\frac{\sqrt{7}}{2}$，$\triangle ACB$ 面積為 $\frac{5\sqrt{3}}{8}$。

再由△ACD～△CBD，故有




$\frac{\Delta ACD}{\Delta CBD}=(\frac{AC}{BC})^2=\frac{12}{7}$。

$\frac{\Delta BCD+\Delta ABC}{\Delta BCD}=\frac{12}{7}$，所以

$\frac{\Delta ABC}{\Delta BCD}=\frac{5}{7}$，即 $\Delta BCD=\frac{7}{5}\times\frac{5\sqrt{3}}{8}=\frac{7\sqrt{3}}{8}$。

ANS：$\frac{7\sqrt{3}}{8}$

8. 已知 $f(x)=\frac{3^x}{3^x+\sqrt{3}}$，則 $f(\frac{1}{2009})+f(\frac{2}{2009})+f(\frac{3}{2009})+...+f(\frac{2008}{2009})=$______________。

首先證明：若 $x+y=1$，則 $f(x)+f(y)=1$。

$$\frac{3^x}{3^x+3^{\frac{1}{2}}}+\frac{3^y}{3^y+3^{\frac{1}{2}}}=\frac{3^{x+y}+3^{x+\frac{1}{2}}+3^{x+y}+3^{y+\frac{1}{2}}}{3^{x+y}+3^{x+\frac{1}{2}}+3^{y+\frac{1}{2}}+3}=\frac{6+3^{x+\frac{1}{2}}+3^{y+\frac{1}{2}}}{6+3^{x+\frac{1}{2}}+3^{y+\frac{1}{2}}}=1$$

因此可得 $f\left(\frac{1}{2009}\right)+f\left(\frac{2}{2009}\right)+f\left(\frac{3}{2009}\right)+\cdots+f\left(\frac{2008}{2009}\right)=\underbrace{1+1+1+\cdots+1}_{1004個}=1004$。

ANS：1004

9. 所有比 1800 小且與 1800 互質的正整數之總和是______________。

因 $1800=2^3\times3^2\times5^2$，故與 1800 互質的數共有 $1800\times\left(1-\frac{1}{2}\right)\times\left(1-\frac{1}{3}\right)\times\left(1-\frac{1}{5}\right)=480$ 個。再利用 $(a,n)=1$ 可推得 $(n-a,n)=1$（其中 $a<n$）這性質可知所有與 1800 互質的數一定可以兩兩配對，其中每對的和都是 1800，故所求為 $1800\times\frac{480}{2}=432000$

ANS：432000

10. 在右圖方格表的每個小方格內，按照圖形所示的方式依序將正整數填入；例如將 1 填入第一行第一列的小方格中；將 2 填入第二行第一列的小方格中；將 3 填入第一行第二列的小方格中；...；將 20 填入第二行第五列的小方格中。則 2009 填入的小方格是第________第_______列。

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 11 | 20 | | | | |
| 4 | 10 | 12 | 19 | | | |
| 3 | 4 | 9 | 13 | 18 | | |
| 2 | 3 | 5 | 8 | 14 | 17 | |
| 1 | 1 | 2 | 6 | 7 | 15 | 16 |
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |

若某數填入第 $x$ 行第 $y$ 列的小方格內且滿足 $x+y=n+1$，則稱此數落在第 $n$ 層。則第一層有 1 個數；第二層有 2 個數；第三層有 3 個數；⋯；第 $k$ 層有 $k$ 個數；因 $\frac{62\times(62+1)}{2}=1953<2009<\frac{63\times(63+1)}{2}=2016$，故 2009 落在第 63 層，意即

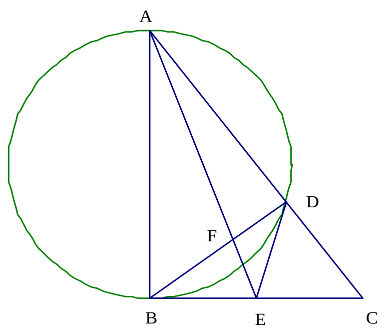
2009 填入第 $x$ 行第 $y$ 列的小方格內滿足 $x+y=63+1=64$；透過觀察可知奇數層的數由下而上遞減，由右而左遞減，可知 2016 填入第 63 行第 1 列的小方格內，因此 2009 填入第 56 行第 8 列的小方格內。

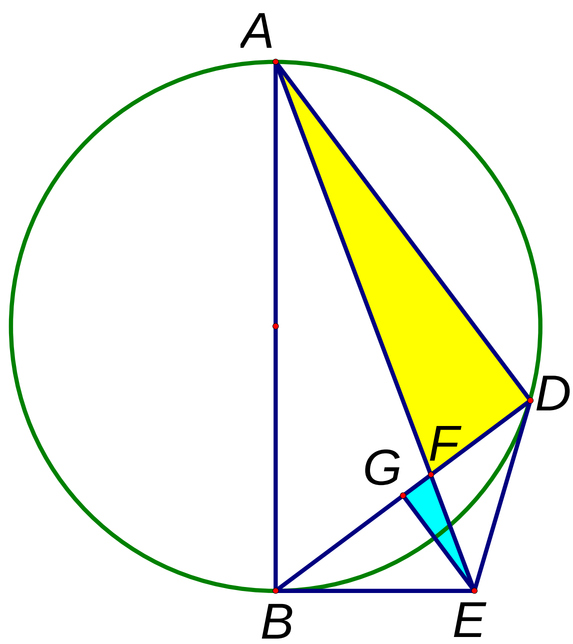
ANS：第 56 行第 8 列

11. 設 $p$ 為質數，若 $p+10$ 與 $p+14$ 也都是質數，則滿足這些條件的質數 $p$ 總共有________個。

因 $10\equiv1(\text{mod}\,3)$ 、 $14\equiv2(\text{mod}\,3)$ ，故 $p+10$ 及 $p+14$ 都是質數僅發生在 $p\equiv0(\text{mod}\,3)$ 時，故滿足題意的只有質數 3 一個。 ANS：1

12. 三角形 $ABC$ 為一直角三角形，$\angle ABC=90^\circ$，線段 $AB$ 長為 10，以線段 $AB$ 為直徑畫一圓交斜邊 $AC$ 於 $D$ 點，線段 $AD$ 長為 8。過 $D$ 點作圓的切線交線段 $BC$ 於 $E$ 點。線段 $AE$ 與線段 $BD$ 相交於 $F$ 點，則線段 $FD$ 之長為_________。




如右圖所示，作 $EG\perp DB$ 交 $DB$ 於 $G$ 點，已知 $AB=10$、 $AD=8$，故 $BD=6$，$BG=3$。

$\angle ADB=\angle EGB=90^\circ$，$\angle BAD=\angle GBE$，所以 $\triangle ADB\sim\triangle BGE$，故 $AD:BD=BG:GE=8:6=3:GE$， 由此可得 $GE=\dfrac{9}{4}$。

$\angle ADF=\angle EGF=90^\circ$，$\angle AFD=\angle GFE$，所以 $\triangle ADF\sim\triangle EGF$，故 $GE:AD=GF:FD=\dfrac{9}{4}:8=3-FD:FD$ ，即

$\dfrac{9}{32}=\dfrac{3}{FD}-1$， 因此知 $FD=\dfrac{96}{41}$. ANS：$\dfrac{96}{41}$

## 第二部分：計算證明，每題 20 分,共 60 分

(注意：請在本試卷正反面空白處依題號作答，須詳列計算過程及說明理由)

**1.** 在一個 12×13 的方格表中，沿著任意兩條水平的格線與兩條鉛直的格線圍出一個四邊形，請問所有可能這樣圍出來的四邊形面積之總和為多少？

(例如：在一個 2×3 的方格表中，可圍出 1×1 的四邊形六個；可圍出 1×2 的四邊形四個；可圍出 2×1 的四邊形三個；可圍出 1×3 的四邊形二個；可圍出 2×2 的四邊形二個；可圍出 2×3 的四邊形一個。則這些可能圍出來的四邊形面積之總和為 6×1×1＋4×1×2＋3×2×1＋2×1×3＋2×2×2＋1×2×3=40。)

【解法一】

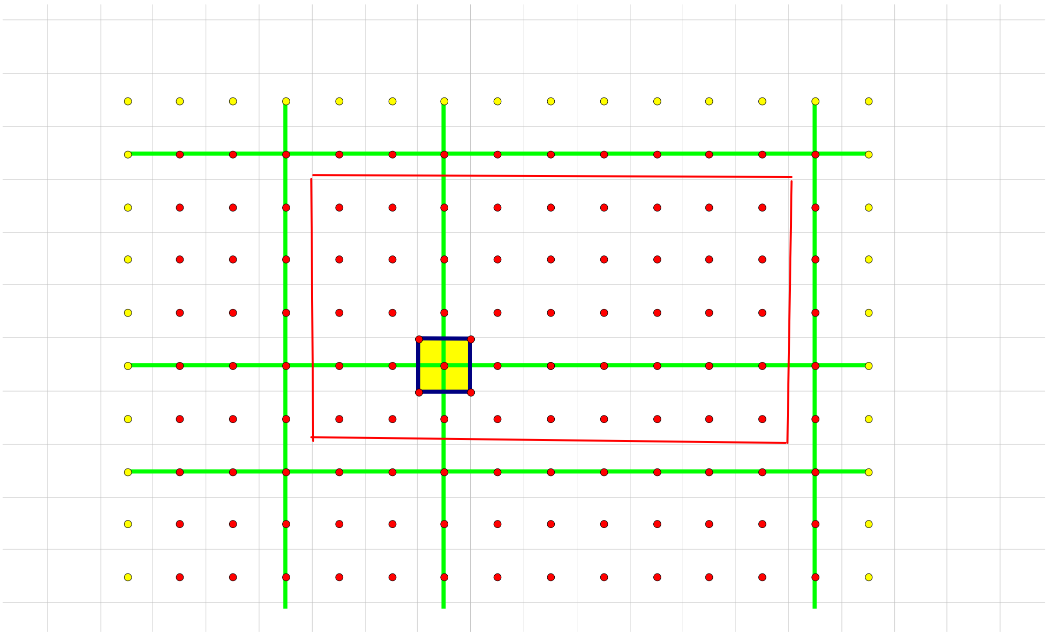
在一個 12×13 的方格表中，可圍出 1×1 的四邊形 156 個；可圍出 1×2 的四邊形 144 個；可圍出 1×3 的四邊形 132 個；可圍出 1×4 的四邊形 120 個；可圍出 1×5 的四邊形 108 個；可圍出 1×6 的四邊形 96 個；可圍出 1×7 的四邊形 84 個；可圍出 1×8 的四邊形 72 個；可圍出 1×9 的四邊形 60 個；可圍出 1×10 的四邊形 48 個；可圍出 1×11 的四邊形 36 個；可圍出 1×12 的四邊形 24 個；可圍出 1×13 的四邊形 12 個。(給 5 分)

可圍出 2×1 的四邊形 143 個；可圍出 2×2 的四邊形 132 個；可圍出 2×3 的四邊形 121 個；…可圍出 2×13 的四邊形 11 個；…；可圍出 12×1 的四邊形 13 個；可圍出 12×2 的四邊形 12 個；…；可圍出 12×12 的四邊形 2 個；可圍出 12×13 的四邊形 1 個。(再給 5 分)其總面積為

$156\times1+2\times144+3\times132+\ldots+2\times144+1\times156=165620$. (再給 10 分)

【解法二】

更一般性，設原有方格表為 $m\times n$，每個小方格的中心用紅點表示，在方格表四周另加一層白點，成為一個$(m+2)\times(n+2)$的格子點圖。在此格子點圖各選取三列及三行，這三列中最上與最下的兩列是圍出四邊形的上下邊界；這三行中最左與最右的行是圍出四邊形的左右邊界；中間的列與中間的行之交點是該圍出四邊形內的一個方格。(給 5 分)



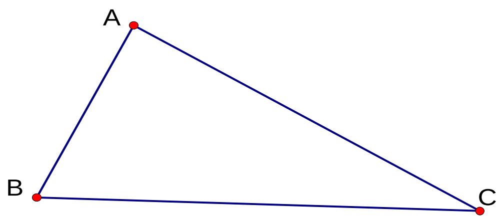
在$\binom{m+2}{3}\binom{n+2}{3}$個選項中，每個圍出四邊形內的小方格各算了一次，所以可能圍出來的四邊形面積之總和也是$\binom{m+2}{3}\binom{n+2}{3}$。(再給 10 分)

故本題的答案為$\binom{14}{3}\binom{15}{3}=\dfrac{14\times13\times12}{3\times2\times1}\times\dfrac{15\times14\times13}{3\times2\times1}=165620$.(再給 5 分)

2. 在 $\Delta ABC$ 中，已知 $\angle ABC = 2\angle ACB$，試證：

(1) $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AB}\cdot\overline{BC}$；

(2) $\overline{AB} + \overline{BC} < 2\overline{AC}$。




【解法一】

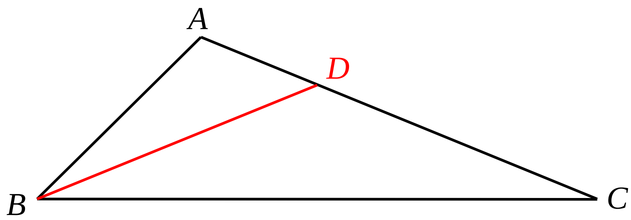
**(1)** 作 $\angle ABC$ 角平分線交 $AC$ 於 $D$ 點。

在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ACB$ 中

$\because \angle ABD = \angle ACB$，$\angle ADB = \angle ABC$

$\therefore \triangle ABD \sim \triangle ACB$ (*AA* 相似性質)

故有 $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{BD}{BC} = \dfrac{AD}{AB} = \dfrac{AC - CD}{AB}$ ……(i)（給 5 分）

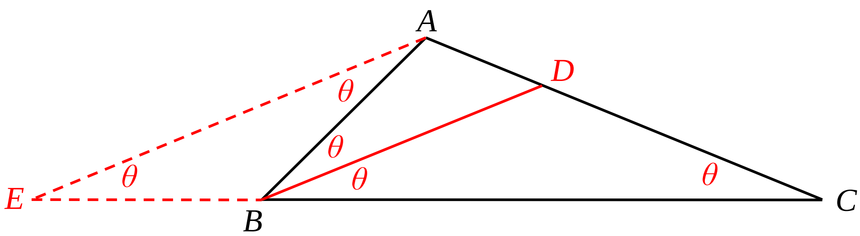



由(i)得知 $AB^2 = AC \times AD$；$AB \times BC = AC \times BD$。故

$AB^2 + AB \times BC = AC \times AD + AC \times BD = AC^2$.（再給 5 分）

**(2)** 如下圖所示，在 $CB$ 的延長線上取一點 $E$，使得 $BE=AB$，由此可得 $BD//AE$，$\angle ABD = \angle BAE = \angle AEB = \theta = \angle ACB$，故 $AE=AC$。（給 5 分）

在 $\triangle ACE$ 中，可知 $2AC = AE + AC > CE = BE + BC = AB + BC$。（給 5 分）




【解法二】

(1) 如上圖所示，在 $CB$ 的延長線上取一點 $E$，使得 $BE=AB$，則 $\angle EAB = \theta = \angle ACB$。（給 5 分）

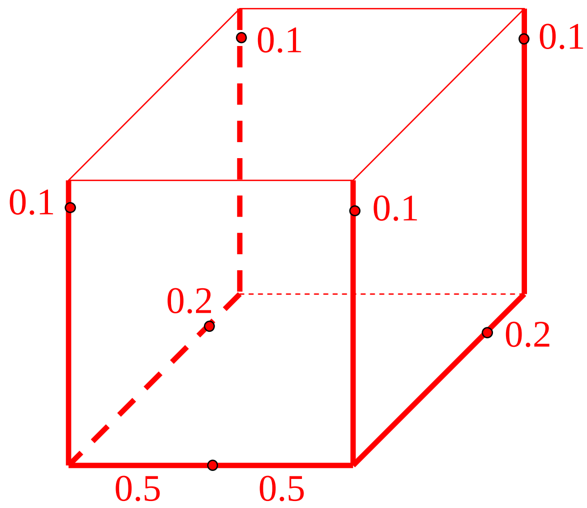
作 $\triangle ABC$ 的外接圓，則 $EA$ 切此圓於點 $A$。$AE^2 = EB \times EC$，即

$AC^2 = AB \times (AB + BC) = AB^2 + AB \times BC$.（再給 5 分）

3. 用鐵絲構成一個稜邊長為 1 的正立方體，請問在此鐵絲正立方體上最多可以放置多少隻螞蟻，使得任兩隻螞蟻之間沿著鐵絲爬行的距離都大於 1？

在此鐵絲正立方體上最多可以放置 7 隻螞蟻，使得任兩隻螞蟻之間沿著鐵絲爬行的距離都大於 1，下圖是其中一個例子：（只宣佈正確答案給 5 分；構造正確例子再給 5 分）

*0*




假設在此鐵絲正立方體上可以放置 8 隻螞蟻，使得任兩隻螞蟻之間沿著鐵絲爬行的距離都大於 1，且每隻螞蟻各佔據一個邊，如果螞蟻在邊上，就佔據這條邊，如果螞蟻在頂點上，則佔據與此頂點相連的三條邊之一條。有螞蟻佔據的邊不能再有其他螞蟻。

**引理**：正立方體上任意八條邊必定存在有一個圈。

**證明**：正立方體的每一條邊都會連接兩個頂點，如果這兩個頂點已經有另一條路徑相連，則必造成有一個圈。我們先只畫出正立方體的八個頂點，再將八條邊以任意次序逐一加入，假如每條邊都連接兩個原本互不連通頂點，則在加入七條邊後，八個頂點便互相連通，加入最後一條邊時，便不可避免地會出現一個圈。（給 5 分）

若一個圈由 $k$ 條邊組成，那麼圈上便有 $k$ 隻螞蟻，但總長度為 $k$，不能使得任兩隻螞蟻之間沿著鐵絲爬行的距離都大於 1。（給 5 分）