

2007 Changchun Invitational World Youth Mathematics Intercity Competition 2007 青少年數學國際城市邀請賽



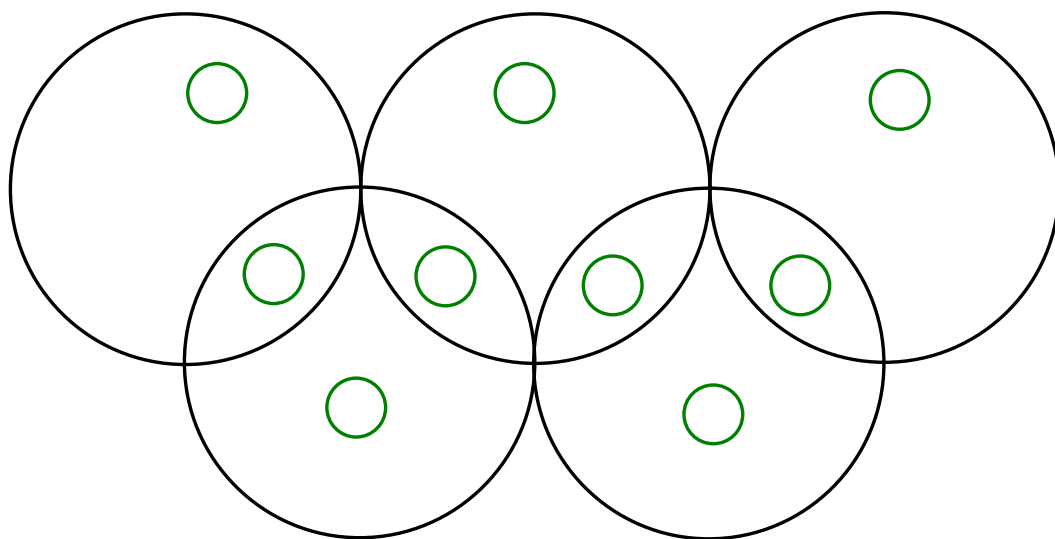
隊際賽試題

2007/7/23 長春市

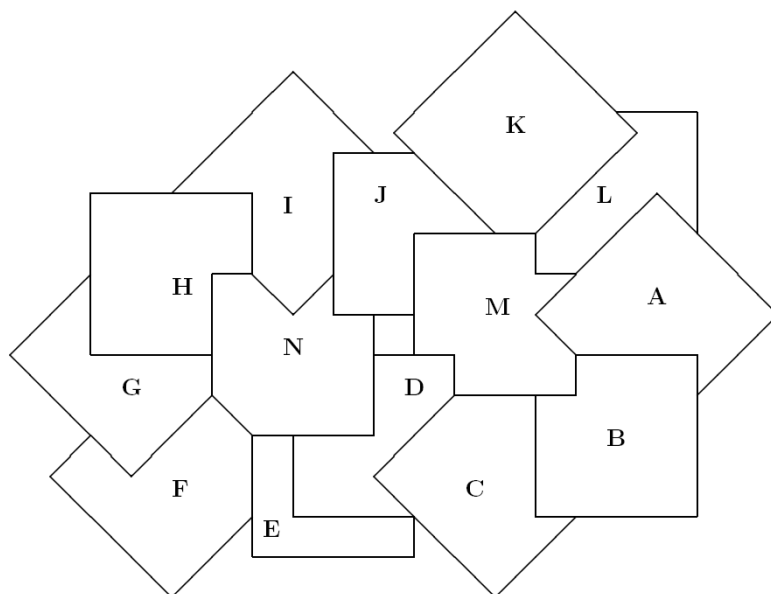
隊名：_____

得分：_____

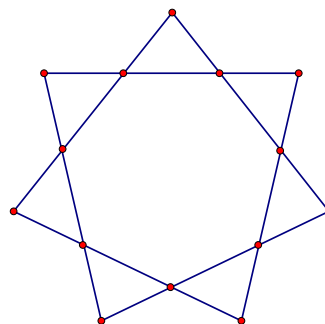
1. 如圖是一個奧運五環，圓環內有 9 個小圓。請把 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 和 9 不重複地填入小圓，使得每個圓環內數字和為 14。



2. 十四張紙片如圖堆疊。一條從紙片 B 出發，最後到達紙片 F 的路徑是這樣得到的：先到上層位置的紙片，再到下層位置的紙片，如此交替行進。同一張紙片可以經過多次，且不必經過每張紙片。請依次寫出一條路徑上的紙片標號。



3. 下圖是一個七角星，它總共有 14 個交點，請將數 1, 2, ..., 14 不重複地填入每個交點處（每點處填寫一個數），使得每條線上所填的四個數之和都相等。（請給出一種填法，不必寫出推理過程。）



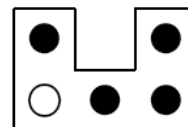
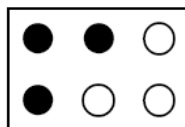
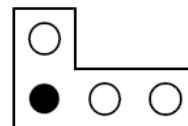
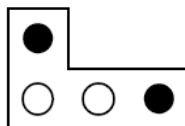
4. 小瑪發現將某個三位數自乘後，所得乘積的末三位數與原三位數相同。問：滿足上述性質的所有不同的三位數的和是多少？

5. 求所有的正整數 m 、 n ，使得 $m^2 + 1$ 是一個質數，且

$$10(m^2 + 1) = n^2 + 1.$$

6. 四個參賽隊在某周進行雙循環賽，每兩個隊之間都要比賽兩次，每個隊每天比賽一場。下圖中的左邊給出了比賽的最後記分牌的一部份，其餘部分裂成了四塊，這些碎塊只在一面寫有得分情況。一個黑圈表示勝一局，白圈表示負一局。問：冠軍是哪個參賽隊？

T	M	Tu	W	Th	F	Sa
A	○					
B	○	
C	●	○		.	.	.
D	●			.	.	.



7. 今有兩張 3×3 方格表 A 與 B ，現將數 $1, 2, \dots, 9$ 按某種順序填入 A 表（每格填寫一個數），然後依照如下規則填寫 B 表：使 B 表中第 i 行、第 j 列交叉處的方格內所填的數等於 A 表中第 i 行的各數和與第 j 列的各數和之差的絕對值；例如 B 表中的 $b_{12} = \left| (a_{11} + a_{12} + a_{13}) - (a_{12} + a_{22} + a_{32}) \right|$ 。
- 問：能否在 A 表適當填入 $1, 2, \dots, 9$ ，使得在 B 表中也出現 $1, 2, \dots, 9$ 這九個數字？

a_{11}	a_{12}	a_{13}
a_{21}	a_{22}	a_{23}
a_{31}	a_{32}	a_{33}

表 A

b_{11}	b_{12}	b_{13}
b_{21}	b_{22}	b_{23}
b_{31}	b_{32}	b_{33}

表 B

8. 設凸四邊形 $ABCD$ 的兩條對角線 AC 與 BD 互相垂直。過 AB 的中點 M 作 CD 的垂線，過 AD 的中點 N 作 CB 的垂線。證明：這兩條垂線的交點在直線 AC 上。
9. 把 1 到 $n(n > 1)$ 這 n 個正整數排成一行，使得任何相鄰兩數之和為完全平方數。
- 問： n 的最小值是多少？

10. 用五種顏色將一張 8×8 棋盤上塗色(每個小方格塗一種顏色)，如圖所示， R 是紅色， Y 是黃色， B 是藍色， G 是綠色， W 是白色。然後把剩下的小方格也用這五種顏色填塗，使得所有相同顏色的小方格是通過邊與邊連著的一整塊，整個棋盤分成了五塊。問：其中最大的一塊有多少個小方格？

R							
						Y	
		B					
G							G
			R				
	W					W	
		B	Y				