

2007 Changchun Invitational World Youth
Mathematics Intercity Competition
2007 青少年數學國際城市邀請賽



個人賽試題 答題時間：120 分鐘 2007/7/23 長春市

隊名：_____ 姓名：_____ 得分：_____

第一部份：填充題，請將答案填寫在空格內。不須列出演算過程，共十二題，

每題 5 分。

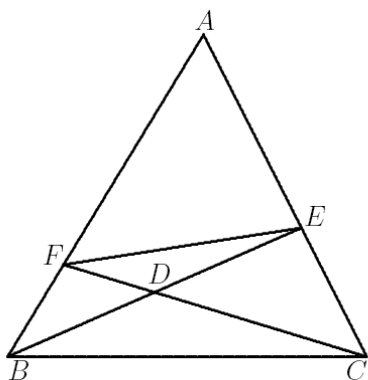
1. 用 A_n 表示 $1, 2, \dots, 101$ 中，能被 n 整除的所有數的算術平均數。問：
 A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 中最大的是那一個？

答案：_____

2. 在一個暴雨的黑夜，孤島上的四個人必須走過一座窄橋到陸地上去避難。過窄橋必須用燈照明，但是他們只有一盞燈，且橋上每次最多只能通過兩個人。若島上還有人，則過橋之人中必須有人把燈送回去。如果四個人單獨過橋，那麼所需的時間分別為 2 分鐘、4 分鐘、8 分鐘和 16 分鐘；如果兩人一起過橋，那麼所需時間依照較慢的人過橋的時間計算。問：這四個人過橋最少需要多少時間？

答案：_____

3. 設 E, F 分別是 $\triangle ABC$ 的邊 AC, AB 上的點，線段 BE, CF 交於點 D 。已知 $\triangle BDF$ ， $\triangle BCD$ ， $\triangle CDE$ 的面積分別為 3，7，7。問：四邊形 $AEDF$ 的面積是多少？



答案：_____

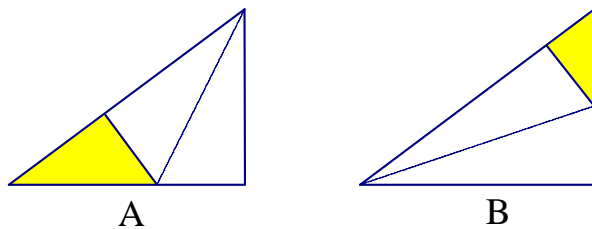
4. 某個團體有 48 名會員，但是只有一半的人有制服。在某次檢閱儀式時，他們排成一個 6×8 的長方陣，恰好可把沒有制服的會員隱藏在長方陣的內部。後來又來了一批會員，但總數還是有一半的人沒有制服，在接下來的檢閱儀式，他們排成了一個不同的長方陣，又恰好可把無制服的會員隱藏在長方陣的內部。問：新來的會員有多少人？

答案：_____

5. 已知連續 2008 個正整數的和是一個完全平方數，問：其中最大的數的最小值是多少？

答案：_____

6. 如圖，A、B 兩個大小形狀相同的三角形紙片，其三邊的長之比為 3:4:5，按圖示方法將它對摺，使摺痕(圖中虛線)過其中的一個頂點，且使該頂點所在兩邊重合，記摺疊後不重合部分面積分別為 S_A , S_B ，已知 $S_A + S_B = 39$ ，求三角形紙片 A 的面積。



答案：_____

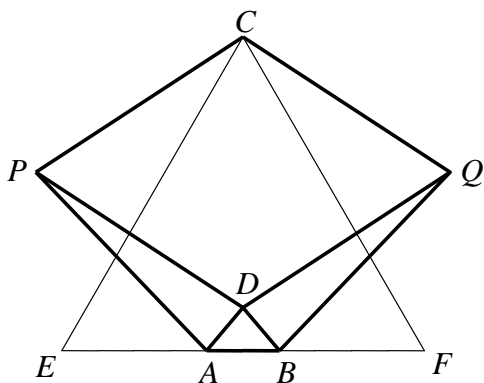
7. 求最大的正整數 n ，使得 $3^{1024} - 1$ 能被 2^n 整除。

答案：_____

8. 用長度分別為 1, 4, 7, 8 的線段圍成一個四邊形，問：這個四邊形的最大面積是多少？

答案：_____

9. 在下圖中， $CE=CF=EF$ ， $EA=BF=2AB$ ，且 $PA=QB=PC=QC=PD=QD=1$ ，求線段 BD 之長度。



答案：_____

10. 把 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 和 9 不重複地填入題中方框內，使下式成立。問：在相加的三個分數中，最大的一個是多少？

$$\frac{1}{\square \times \square} + \frac{\square}{\square \times \square} + \frac{\square}{\square \times \square} = 1$$

答案：_____

11. 求滿足 $25\{x\} + [x] = 125$ 的所有實數 x 的和。(其中 $[x]$ 表示不超過 x 的最大整數， $\{x\} = x - [x]$ 表示 x 的小數部分)

答案：_____

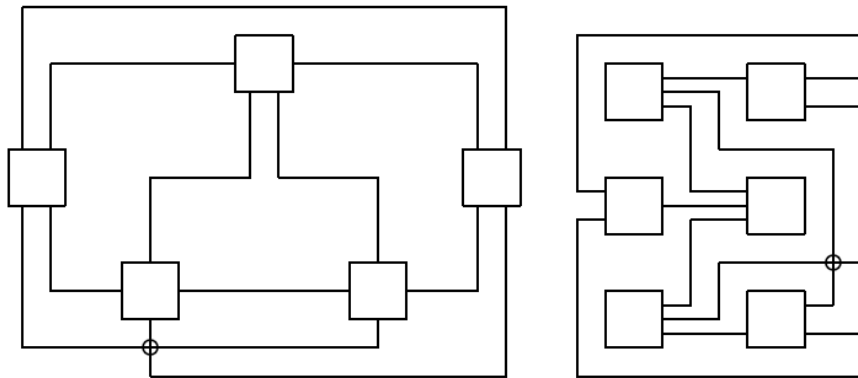
12. 設 n 為正整數，如果存在一個完全平方數，使得在十進制表示下此完全平方數的各數碼之和為 n ，那麼稱 n 為好數(例如 13 是一個好數，因為 $7^2=49$ 的數碼和等於 13)。在 1, 2, ..., 2007 中有多少個好數？

答案：_____

第二部份：計算及證明題，必須寫下計算或證明過程。共三題，每題 20 分。

1. 在 4×4 的表格中，可作十八條直線，即四橫、四縱的八條直線，從左上到右下和從由右上到左下各五條對角線，這些對角線可能通過 2、3 或 4 個小方格。在表格中要放十個籌碼，每個小方格最多放一個。若這十八條直線中某條直線上有偶數個籌碼，則得一分。問：最多可以得多少分？

2. 已知五個城市兩兩相連所得的 10 條道路中，至少有一個交叉路口，如下左圖。又已知三個村莊和三個城市相連所得的 9 條道路中，至少有一個交叉路口，如下右圖。利用上述結論，問：用 15 條道路把六個城市兩兩相連，至少會產生多少個交叉路口？



3. 若一個質數的各位數碼經任意排列後仍然是質數，則稱它是一個“絕對質數”。例如：2, 3, 5, 7, 11, 13(31), 17(71), 37(73), 79(97), 113(131, 311), 199(919, 991), 337(373, 733),...都是絕對質數。求證：絕對質數的各位數碼不能同時出現數碼 1, 3, 7 與 9。