

2006 年青少年數學國際城市邀請賽
參賽代表遴選初選
個人數學競賽試題

編號:_____校名:_____國中 姓名:_____

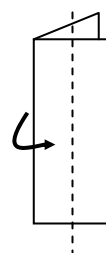
作答時間：二 小 時

第一部分：填充題，每小題 5 分，共 60 分

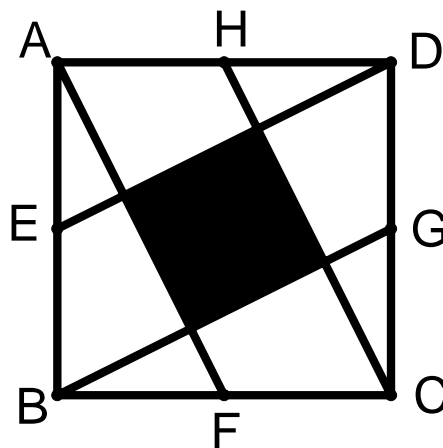
1. 計算 $\underbrace{99\cdots9}_{2006\text{個}} \times \underbrace{99\cdots9}_{2006\text{個}} + 1 \underbrace{99\cdots9}_{2006\text{個}} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
2. 設 m 為介於 9 和 17 之間的正整數，若 6，10 和 m 的平均數是偶數，則 $m = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
3. 設 n 為正整數，如果 n 與它的所有的數字之和為 313，則滿足這樣條件的 n 之最小值為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。
4. 已知一個五位數 n ，其任意兩個數字之差不小於 2，則滿足這樣條件的 n 共有 $\underline{\hspace{2cm}}$ 個。
5. 設 a, b 為二正數，若 $(a-b):(a+b):ab = 1:7:24$ ，則該兩正數之乘積 $ab = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
6. 已知正整數 m, n 使得 $\frac{1}{3} < \frac{m}{n} < 1$ 成立。若將分數 $\frac{m}{n}$ 的分母乘以一個正整數，而分子加上此正整數，所得新分數的值與原分數的值相同。則滿足此條件的所有分數 $\frac{m}{n}$ 共有 $\underline{\hspace{2cm}}$ 個。
7. 把分數依下列方式排成一數列：
 $\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{1}{2}, \frac{3}{1}, \frac{2}{2}, \frac{1}{3}, \frac{4}{1}, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{n}{1}, \frac{n-1}{2}, \dots, \frac{2}{n-1}, \frac{1}{n}, \dots$
其中 n 為正整數。則 $\frac{31}{30}$ 是在第 $\underline{\hspace{2cm}}$ 項。
8. 計算 $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2006}\right) + \left(\frac{2}{3} + \frac{2}{4} + \dots + \frac{2}{2006}\right) + \left(\frac{3}{4} + \dots + \frac{3}{2006}\right) + \dots + \left(\frac{2004}{2005} + \frac{2004}{2006}\right) + \frac{2005}{2006}$
 $= \underline{\hspace{2cm}}$ 。

(翻面繼續作答)

9. 某人訂購 4 雙黑襪子和一些藍襪子，黑襪子每雙的價格是藍襪子的 2 倍，可是訂單上兩種顏色填顛倒了，為此他的支出增加 50 %，那麼原計畫訂購的黑襪子和藍襪子的數量比為_____。
10. 已知三角形之邊長均為整數，其中二邊長分別為 9、10，且其面積值為整數，則其第三邊長為_____。
11. 將正方形的紙片沿鉛直的中線對摺，繼續再將它沿其鉛直的中線對摺，得一摺線 (如右下圖中虛線)，今從虛線處剪開，而得到三張矩形紙片 (一張大的，兩張小的)，則每張小矩形周長和大矩形周長之比為_____。



12. 如下圖，點 E、F、G、H 分別是正方形 ABCD 各邊的中點。已知中間 陰影部分 (小正方形) 的面積是 45，則 \overline{AB} 長=_____。



(翻面繼續作答)

第二部分：計算證明，每題 20 分,共 60 分

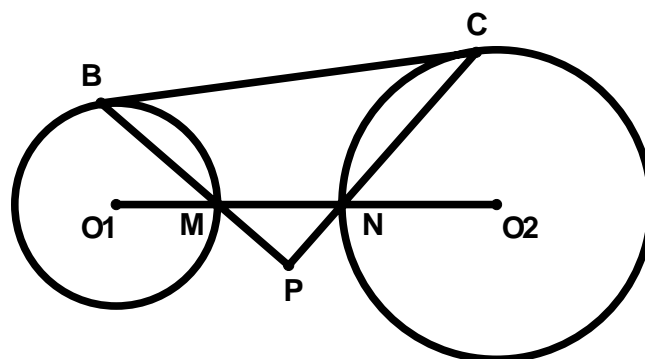
(注意：請在題後空白處作答，須詳列過程及說明理由)

1. 將正整數 2006 用二個或二個以上連續正整數之和來表示，請問共有幾種不同的表示法(這些連續正整數由小而大排列)？

2. 設 x, y 為正整數，已知 $\begin{cases} xy + x + y = 35 \\ x^2y + xy^2 = 286 \end{cases}$ ，求 (x, y) 的解。

(翻面繼續作答)

3. 已知圓 O_1 、圓 O_2 互相外離， \overline{BC} 是圓 O_1 與圓 O_2 的外公切線，點 B 、 C 分別為其切點，連心線 $\overline{O_1O_2}$ 分別交圓 O_1 、圓 O_2 於 M 、 N ，令 \overline{BM} 、 \overline{CN} 的延長線交於點 P （如下圖）。請問 \overline{BP} 與 \overline{CP} 是否垂直？請證明你的結論。



2006 年青少年數學國際城市邀請賽
參賽代表遴選初選
隊際競賽試題

編號:_____校名:_____國中 姓名:_____

作答時間：一小時

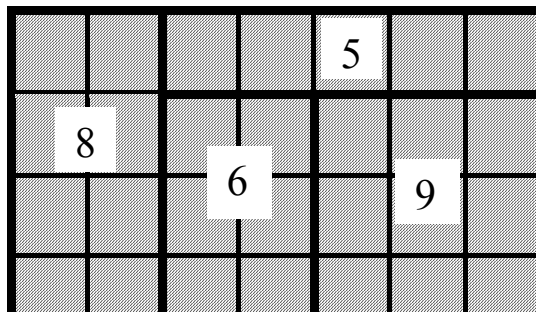
每大題各 30 分，共 120 分

1. 設三個正整數 a 、 b 、 c 的最大公因數為 1，且滿足 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c}$ 。求證：
 $a+b$ 、 $a-c$ 和 $b-c$ 都是完全平方數。

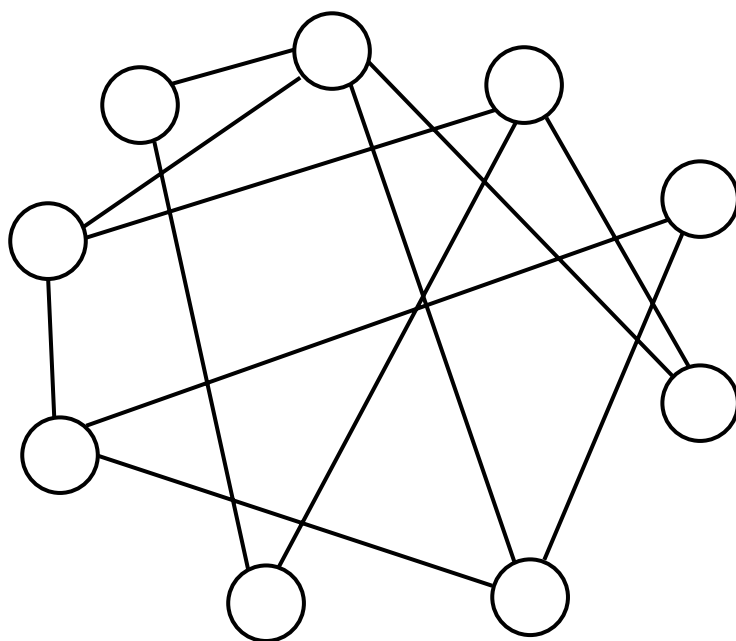
2. 令 $n=2006$ ， $x_0 = \frac{1}{n}$ ， $x_k = \frac{1}{n-k}(x_0 + x_1 + \cdots + x_{k-1})$ ，
其中 $k=1, 2, \dots, n-1$ 。求 $x_0 + x_1 + \dots + x_{2005}$ 之值。

(翻面繼續作答)

3. 有一塊巧克力糖被劃分成 4×7 的小方格，我們可以把巧克力糖沿著格線從頭到尾剝開，但不可以只剝到一半或斜剝或疊合在一起剝。小明欲將這塊巧克力糖剝為四塊與朋友分享，請問剝出的四塊巧克力糖的小方格數共有幾種不同的可能(剝下的巧克力糖只考慮小方格數，不考慮順序)? 下圖是一個剝為 $5:6:8:9$ 的例子。



4. 將數字 $1 \sim 9$ 不重複地填入下圖中的 9 個圓圈內，使得與填入 1 的圓圈相連接的圓圈內的數字和等於 10；與填入 2 的圓圈相連接的圓圈內的數字和等於 15；.....；與填入 9 的圓圈相連接的圓圈內的數字和等於 21；其餘填法如下圖右所列。



1 ≈ 10	2 ≈ 15
3 ≈ 5	4 ≈ 9
5 ≈ 7	6 ≈ 20
7 ≈ 17	8 ≈ 18
9 ≈ 21	