

2006 年青少年數學國際城市邀請賽

參賽代表遴選初選

個人數學競賽試題

(參考答案)

第一部分：填充題，每小題 5 分，共 60 分

(1) ans: $= (10^{2006})^2 = 10^{4012}$

(7) ans : 1800

(2) ans: 14

(8) ans : $\frac{2005 \times 2006}{4} = 1005507.5$

(3) ans : 296

(9) ans : 1 : 4

(4) ans : 600

(10) ans : 17(原題目漏打三邊長

都為整數，故答 $\sqrt{181}$ 、 $\sqrt{73}$ 、 $\sqrt{37}$ 等使面積為整數之答案亦給分)

(5) ans : 48

(11) ans: 5 : 6

(6) ans : 3

(12) ans : 15

第二部分：計算證明，每題 20 分，共 60 分

(注意：在答案卷上請依題號作答，須詳列過程及說明理由)

1. 將數字 2006 用二個或二個以上連續正整數之和來表示，問共有幾種不同表示法(這些連續正整數由小而大排列)。

(Sol.) 令 $2006 = n + (n+1) + \cdots + m$

$$\begin{aligned} &= \frac{m(m+1)}{2} - \frac{(n-1)n}{2} = \frac{m^2 + m - n^2 + n}{2} \\ &= \frac{(m-n)(m+n) + (m+n)}{2} = \frac{(m+n)(m-n+1)}{2} \end{aligned}$$

$$\therefore 4012 = (m+n)(m-n+1) = 2^2 \times 1003 = 2^2 \times 17 \times 59$$

$$\because 2 \leq m-n+1 < m+n$$

$$\therefore \begin{array}{c|c|c|c|c|c} m+n & 68 & 2 \times 59 & 17 \times 59 & 2 \times 17 \times 59 & 2^2 \times 59 \\ \hline m-n+1 & 59 & 2 \times 17 & 4 & 2 & 17 \\ \hline & & \text{(不合)} & & \text{(不合)} & \end{array}$$

$$\Rightarrow m+n+m-n+1=4m+1$$

$$\therefore \begin{array}{c|c|c|c} m & 63 & 503 & 126 \\ \hline n & 5 & 500 & 110 \end{array}$$

共有三組不同表法。

2. 設 x, y 為正整數，已知 $\begin{cases} xy + x + y = 35 \\ x^2y + xy^2 = 286 \end{cases}$ ，求 (x, y) 的解。

解：令 $a = xy$, $b = x + y$

$$\text{原題即} \begin{cases} a + b = 35 \\ a \cdot b = 286 \end{cases}$$

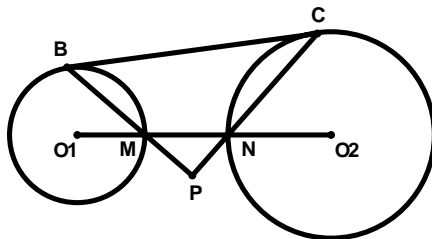
$\therefore a, b$ 為 $z^2 - 35z + 286 = 0$ 之解。

$$(a, b) = (13, 22) \text{ or } (22, 13)$$

$$\text{但} \begin{cases} a = x \cdot y = 13 \\ b = x + y = 22 \end{cases} \text{無正整數解，不合。}$$

$$\begin{cases} a = x \cdot y = 22 \\ b = x + y = 13 \end{cases} \Rightarrow (x, y) = (2, 11) \text{ or } (11, 2)$$

3. 已知圓 O_1 、圓 O_2 外離， \overline{BC} 是圓 O_1 與圓 O_2 的外公切線，B、C 為切點，連心線 $\overline{O_1O_2}$ 分別交圓 O_1 、圓 O_2 於 M、N， \overline{BM} 、 \overline{CN} 的延長線交於點 P（如下圖）。請問 \overline{BP} 與 \overline{CP} 是否垂直？證明你的結論。



解：作 $\overline{O_1B}$ 與 $\overline{O_2C}$

$$\angle PNM = \angle CNO_2 = \frac{1}{2}(\pi - \angle NO_2C)$$

$$\angle PMN = \angle BMO_1 = \frac{1}{2}(\pi - \angle MO_1B)$$

$$\text{又 } \overline{O_1B} \perp \overline{BC}, \overline{O_2C} \perp \overline{BC}$$

$$\therefore \angle NO_2C + \angle MO_1B = \pi$$

$$\therefore \angle PNM + \angle PMN = \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \angle BPC = \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore \overline{BP} \perp \overline{CP}$$

2006 年青少年數學國際城市邀請賽

參賽代表遴選初選

隊際競賽試題

編號:_____校名:_____國中 姓名:_____

作答時間: 一小 時

每大題各 30 分，共 120 分

1. 設三個正整數 a 、 b 、 c 的最大公因數為 1，且滿足 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c}$ 。求證：

$a+b$ 、 $a-c$ 和 $b-c$ 都是完全平方數。

pf: $a+b = \frac{ab}{c}$ (*) $\Rightarrow c \mid ab$

\therefore 令 $c = xy$ ，其中 $x \mid a$, $y \mid b$

$\because (a, b, c) = 1 \Rightarrow (x, b) = 1, (y, a) = 1$

令 $a = ux$, $b = vy$

由(*)得 $ux + vy = uv$ (**)

$u \mid uv - ux = vy$, $\because (y, a) = (y, ux) = 1$

$\Rightarrow (u, y) = 1$, $\therefore u \mid v$

同理可證 $v \mid u$, $\therefore u = v$ #

由(**)得 $x + y = u$

而 $a + b = ux + uy = u^2$

$a - c = ux - xy = x(u - y) = x^2$

$b - c = uy - xy = y(u - x) = y^2$

2. 令 $n=2006$, $x_0 = \frac{1}{n}$, $x_k = \frac{1}{n-k}(x_0 + x_1 + \cdots + x_{k-1})$, 其中 $k=1, 2, \cdots, n-1$ 。求 $x_0 + x_1 + \cdots + x_{2005}$ 之值。

< 參考解法 >

$$x_k = \frac{1}{2006-k}(x_0 + x_1 + \cdots + x_{k-1}) \quad , \quad \text{故 } (2006-k)x_k = x_0 + x_1 + \cdots + x_{k-1}$$

$$x_0 = \frac{1}{2006} \quad , \quad 2006x_0 = 1$$

$$k=1 \quad , \quad 2005x_1 = x_0 \quad , \quad \text{故 } 2006x_1 = x_0 + x_1$$

$$k=2 \quad , \quad 2004x_2 = x_0 + x_1 \quad , \quad \text{故 } 2006x_2 = x_0 + x_1 + 2x_2$$

$$k=3 \quad , \quad 2003x_3 = x_0 + x_1 + x_2 \quad , \quad \text{故 } 2006x_3 = x_0 + x_1 + x_2 + 3x_3$$

⋮

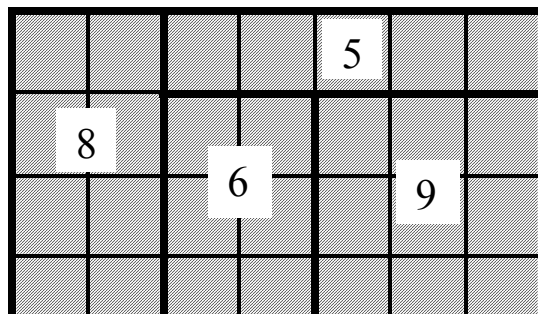
$$k=2005 \quad , \quad 2006x_{2005} = x_0 + x_1 + x_2 + \cdots + x_{2004} + 2005x_{2005}$$

故可得

$$2006(x_0 + x_1 + \cdots + x_{2005}) = 1 + 2005(x_0 + x_1 + \cdots + x_{2005})$$

$$x_0 + x_1 + \cdots + x_{2005} = 1$$

3. 有一塊巧克力糖被劃分成 4×7 的小方格，我們可以把巧克力糖沿著格線從頭到尾剝開，但不可以只剝到一半或斜剝或疊合在一起剝。小明欲將這塊巧克力糖剝為四塊與朋友分享，請問剝出的四塊巧克力糖的小方格數共有幾種不同的可能(剝下的巧克力糖只考慮小方格數，不考慮順序)? 下圖是一個剝為 $5:6:8:9$ 的例子。

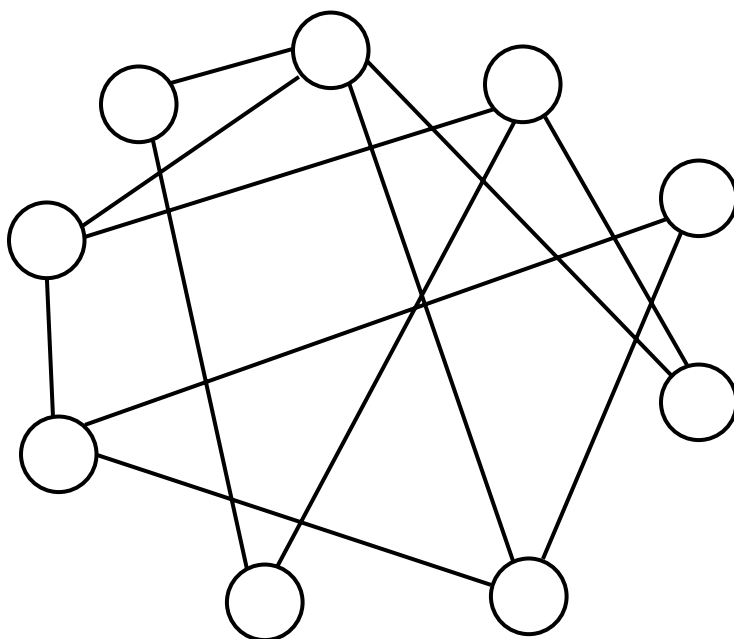


<參考解法>

考慮所有可能剝法，並刪除相同方格數的剝法後，可得以下共 69 種情況：

1	1	2	24	2	3	3	20	3	5	8	12
1	1	5	21	2	3	5	18	3	6	7	12
1	1	6	20	2	3	8	15	3	7	9	9
1	1	12	14	2	4	4	18	3	8	8	9
1	2	4	21	2	4	6	16	4	4	4	16
1	2	7	18	2	4	7	15	4	4	5	15
1	2	9	16	2	4	8	14	4	4	6	14
1	3	3	21	2	4	10	12	4	4	8	12
1	3	4	20	2	5	6	15	4	4	10	10
1	3	6	18	2	5	7	14	4	5	5	14
1	3	12	12	2	5	9	15	4	6	6	12
1	3	16	8	2	6	6	14	4	6	8	10
1	4	5	18	2	6	8	12	4	6	9	9
1	4	8	15	2	6	10	10	4	7	7	10
1	6	6	15	2	7	7	12	4	7	8	9
1	6	7	14	2	8	8	10	4	8	8	8
1	6	9	12	3	3	4	18	5	5	8	10
2	2	3	21	3	3	6	16	5	6	7	10
2	2	4	20	3	3	7	15	5	6	8	9
2	2	8	16	3	3	8	14	6	6	7	9
2	2	10	14	3	4	6	15	6	6	8	8
2	2	12	12	3	4	7	14	6	7	7	8
2	2	6	18	3	4	9	12	7	7	7	7

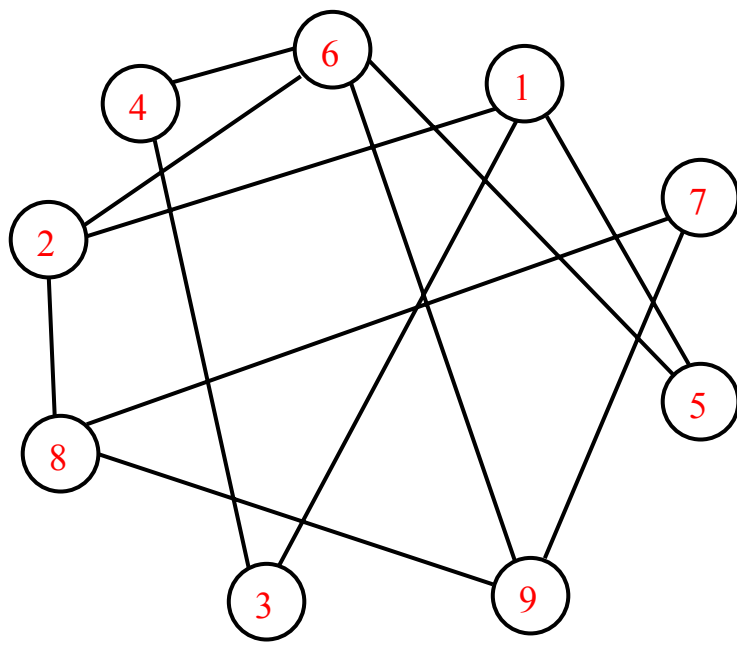
4. 將數字 1~9 不重複地填入下圖中的 9 個圓圈內，使得與填入 1 的圓圈相連接的圓圈內的數字和等於 10；與填入 2 的圓圈相連接的圓圈內的數字和等於 15；……；與填入 9 的圓圈相連接的圓圈內的數字和等於 21；其餘填法如下圖右所列。



$\textcircled{1} \approx 10$	$\textcircled{2} \approx 15$
$\textcircled{3} \approx 5$	$\textcircled{4} \approx 9$
$\textcircled{5} \approx 7$	$\textcircled{6} \approx 20$
$\textcircled{7} \approx 17$	$\textcircled{8} \approx 18$
$\textcircled{9} \approx 21$	

解 答

將數字 1~9 不重複地填入圖中的 9 個圓圈內，使得每個圓圈所連接的數字和如圖右所列。



$\textcircled{1} = 10$	$\textcircled{2} = 15$
$\textcircled{3} = 5$	$\textcircled{4} = 9$
$\textcircled{5} = 7$	$\textcircled{6} = 20$
$\textcircled{7} = 17$	$\textcircled{8} = 18$
$\textcircled{9} = 21$	