

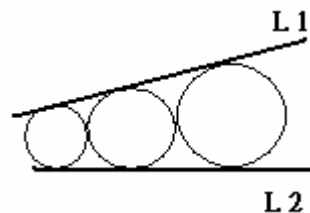
「2005 年青少年數學國際城市邀請賽」
參賽代表遴選初選
個人數學競賽試題

編號：_____ 校名：_____ 國中 姓名：_____

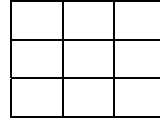
作答時間：二小時

第一部分：填充題，每小題 5 分，共 60 分

1. 設 $N=100^2 - 99^2 + 98^2 - 97^2 + \dots + 42^2 - 41^2$ ，若 a 為大於 10 的質數且 a 可整除 N ，則 $a =$ _____。
2. 無論 m 為任何整數，二次函數 $y=x^2+(2-m)x+m$ 的圖形會經過一個固定的點，則固定的點坐標為_____。
3. 已知一個三角形的三邊長分別為 a, b 及 c ，且在此三邊上的高分別為 ℓ, m, n ，若 $\ell : m : n = 9 : 5 : 6$ ，則 $a : b : c =$ _____。
4. 請把 4860 分成四份，滿足以下要求：第一份加上 8，第二份減去 8，第三份乘以 8，第四份除以 8，然後依次得出來的和、差、積、商必須是相同一個數。請問這個相同的數是多少？_____。
- 5 設 n 為正整數，如果 $8n+50$ 能被 $2n+1$ 所整除，則 $n =$ _____。
6. 若將乘積 $1 \times 3 \times 5 \times 7 \times \dots \times 2003 \times 2005$ 寫成一個數，則此數的末三位數字是多少？_____。
7. 設 n 為正整數，且滿足 $1+2+3+\dots+n < 2005$ ，則 n 的最大可能值為何？
_____。
8. 如下圖，三個圓依序相切並且都和直線 L_1 及 L_2 相切。若其中最小圓和最大圓的半徑分別為 20 及 45，則在中間的圓其半徑長 = _____。

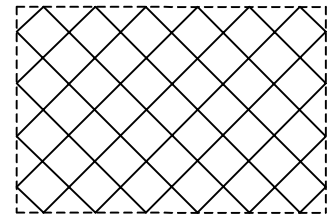


9. 在一個 3×3 的方格表中(如下圖)，如果把這九個小方格都塗上顏色，並且規定每一行、每一列以及兩條對角線上的任意二個小方格所塗上的顏色都不能相同，那麼最少需要使用幾種不同的顏料？ _____

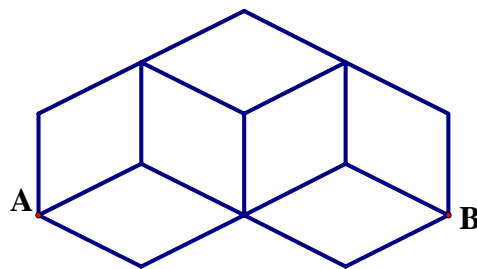


10. 在 $1 \times n$ 棋盤的每個小方格中，任意放入一個紅色的 棋子或一個黑色的 棋子，規定每個小方格都不可以空著。我們發現無論怎麼放一定有三個同色的 棋子，而在中間的棋子與另兩個同色棋子的距離相等。請問 n 的最小值是多 少？ _____

11. 將一些正方形用如右圖一樣方式填滿一個矩形盒子，則稱這些正方形可以被組裝成一個「鋸齒狀矩形」；右圖恰為一個 6×4 的鋸齒狀矩形，它是由 39 個大小相同的正方形所構成的。請問一個 9×7 的 鋸齒狀矩形內有多少個這樣的正方形？ _____



12. 下圖中，如果規定由 A 走到 B 只可沿著線段行進，且任何點都不可以通過 二次或二次以上，問由 A 走到 B 共有多少條不同的路徑？ _____



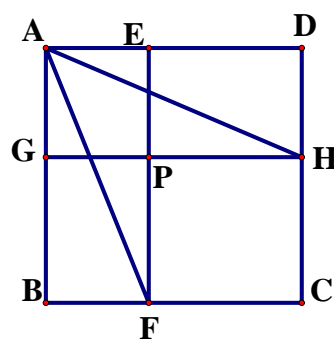
第二部分：計算證明，每題 20 分，共 60 分

(注意：在答案卷上請依題號作答，須詳列過程及說明理由)

1. 設 a, b, c, d, e 及 f 都不為 0，請問在 $ab, cd, ef, -ac, -be, -df$ 中最少有多少個值是正數？

2. 設 p, q 為質數，如果一元二次方程式 $x^2 - (6p - 4q)x + 3pq = 0$ 的二個解都是整數，試求滿足這樣條件的所有可能數對 (p, q) 。

3. 如圖，正方形 $ABCD$ 中， E, F, G, H 分別為 $\overline{AD}, \overline{BC}, \overline{AB}, \overline{CD}$ 上的點，使得 \overline{EF} 平行 \overline{AB} ， \overline{GH} 平行 \overline{AD} 且 \overline{EF} 與 \overline{GH} 交於 P 點。如果正方形 $PFCH$ 的面積正好是正方形 $AGPE$ 面積的 2 倍，試求 $\angle FAH$ 的度數。



「2005 青少年數學國際城市邀請賽」

參賽代表遴選初選

隊際競賽試題

編號：_____ 校名：_____ 國中 姓名：_____

作答時間：一小時

每大題各 30 分，共 120 分

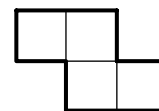
1. 計算：
$$\frac{(1965^4+64)(1973^4+64)(1981^4+64)(1989^4+64)(1997^4+64)(2005^4+64)}{(1961^4+64)(1969^4+64)(1977^4+64)(1985^4+64)(1993^4+64)(2001^4+64)}$$
之值。

2. 將數字 1, 2, …, 9 不重複地填入□內，使得下列等式成立：

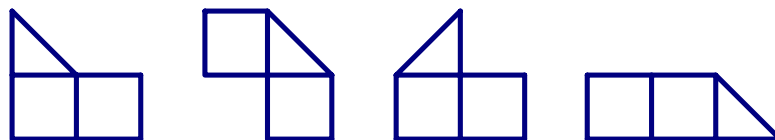
$$\square\square \times \square\square = \square\square\square \times \square\square$$

(答案有很多組，請至少找出兩組；能找出越多越好。)

3. 多方塊是將一些正方形依邊與邊相連接而成的形狀。例如：右圖是一個四方塊。若定義 $2\frac{1}{2}$ 方塊是由 2 個單位正方形與半個單位正方形所組成且使得相鄰兩個正方形邊邊相連接，旋轉或翻轉視為相同)。



以下四個圖案是所有 $2\frac{1}{2}$ 方塊的拼法：



請問 $3\frac{1}{2}$ 方塊有多少個不同的拼法(旋轉翻轉視為相同)? 請將它們畫出來。

3. 用重 1 克、3 克、9 克、27 克、81 克、243 克和 728 克 (注意：不是 729 克)的砝碼各 1 個，稱重時若允許將砝碼放在天平的左右盤，請問能否在天平上分別準確地稱出重量為 500 克、600 克、700 克、800 克、900 克、1000 克的物體?如果可以準確地稱出，請分別列出放在天平左右盤的各砝碼和物體的重量。