

2005 Kaohsiung Invitational World Youth Mathematics  
Intercity Competition

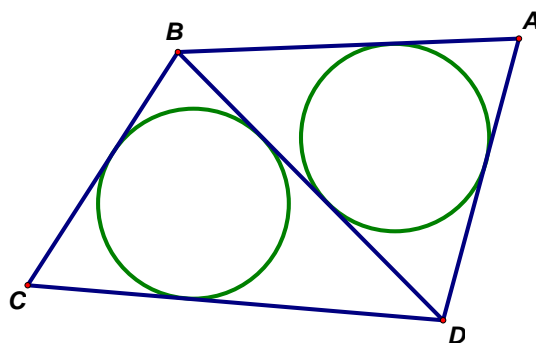
2005 青少年數學國際城市邀請賽

隊際賽試題

2005/8/3 高雄市

隊名：\_\_\_\_\_ 得分：\_\_\_\_\_

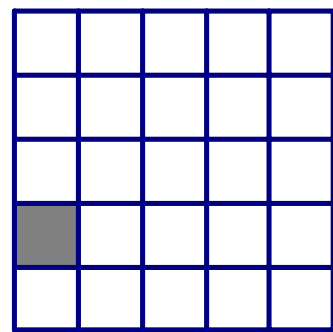
1. 已知  $a, b, c$  為正整數且滿足： $a + b + c = 20$  與  $ab + bc - ca - b^2 - 20 = 0$ 。  
試求  $abc$  的所有可能值。
2. 已知  $a_1, a_2, \dots, a_{49}$  為 49 個正整數，這 49 個正整數的總和是 624。試證這 49 個正整數中至少有三個數是相等的。
3. 把既不是平方數，也不是立方數的所有自然數依照由小到大的順序排列，得到前六項為：2, 3, 5, 6, 7, 10。請問這些自然數的排列中其第 2005 個數是什麼？
4. 如圖所示， $ABCD$  是一個凸四邊形。如果  $\triangle ABD$  和  $\triangle BCD$  的內切圓與線段  $BD$  相切於同一點，試證明：四邊形  $ABCD$  有內切圓。




5. 試找出一個三角形使得我們可以將該三角形分割成 20 個全等的小三角形。  
並請將分割方式畫出來。

6. A 與 B 二人對賭，由 B 作莊，A 每次可下注 0 元或多達至他所現擁有的賭金。若某局 A 贏了，則 B 賠付 A 同額的投注金；若 A 輸了，則 B 沒收 A 的投注金。開始時 A 有賭資 3 元，二人共賭五局，B 向 A 保證只讓 A 輸一局，但每局要等 A 下注完後他才決定要不要贏這一局。請問 A 有何策略可以保證在五局結束後能擁有最多的錢？共有多少元？

7. 一隻青蛙位於如下圖所示  $5 \times 5$  方格表塗上陰影的方格內，它可以水平或鉛直跳到的相鄰的方格內，但不得斜著跳。試證這隻青蛙無法恰好跳經過每個方格一次。



8. 試求正整數  $n$ ，使得  $n^4 - 4n^3 + 15n^2 - 30n + 27$  之值為正的質數。

9. 在  $7 \times 7$  的正方形方格中，任意空去一個  $1 \times 1$  的小方格後得到一個 48 個小方格圖案。試證此圖案可以沿格線完整地剪成 16 個  形圖案。

10. 已知  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$  都是正整數， $a_0 > a_1 > a_2 > \dots > a_n > 1$  且滿足

$$\left(1 - \frac{1}{a_1}\right) + \left(1 - \frac{1}{a_2}\right) + \dots + \left(1 - \frac{1}{a_n}\right) = 2\left(1 - \frac{1}{a_0}\right).$$

請找出  $(a_0, a_1, a_2, \dots, a_n)$  所有可能的解。