2008 小學數學競賽選拔賽決賽(一)試題

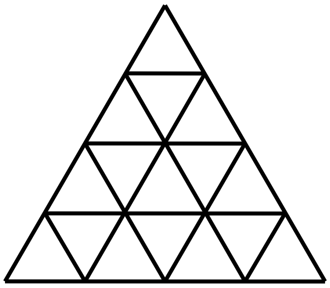
第　一　試　應 用 題 (考試時間 90 分鐘)

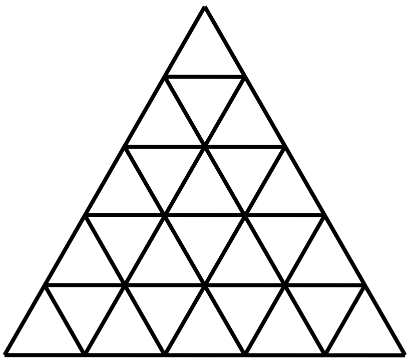
◎ 請將答案填入答案卷對應題號的空格內，只須填寫答案，不須計算過程。本題目卷正反面空白處可為作演算草稿紙。每題 10 **分，共** 120 **分**

1. 有一個五位數 $\overline{a679b}$，它可被 72 整除。請問 a^2+b^2 等於多少？

因 72＝8×9，所以 $\overline{a679b}$ 同時為 8 的倍數與 9 的倍數。因為 1000 為 8 的倍數，故判斷 $\overline{a679b}$ 為 8 的倍數相當於判斷 $\overline{79b}$ 為 8 的倍數，因此可以得知 b=2。因 $\overline{a679b}$ 為 9 的倍數，故 a+6+7+9+b=a+b+22 也必須是 9 的倍數。由 b=2 可以得知 a=3。所以 $a^2+b^2=9+4=13$。 ANS：13

2. 下左圖中共有 27 個三角形：16 個小三角形、7 個邊長為 2 單位的三角形（包括一個倒立的）、3 個邊長為 3 單位的三角形、1 個邊長為 4 單位的三角形。請問下右圖中共有多少個三角形？





邊長為 1 單位的三角形有 25 個、邊長為 2 單位的三角形有 13 個（包括 3 個倒立的）、邊長為 3 單位的三角形有 6 個、邊長為 4 單位的三角形有 3 個、邊長為 5 單位的三角形有 1 個，因此共有 25+13+6+3+1＝48 個三角形。

ANS：48

3. 數 89 之數碼和為 17。請問 1、2、3、…、2008 這 2008 個數之數碼和的總和為多少？

數碼和的總和

＝1+2+3+4+5+6+7+8+9+(1+0)+(1+1)+(1+2)+…+(2+0+0+7)+(2+0+0+8)，

故 1～2008 之數碼和的總和可以分成 1～2008 中所有數字的個位數碼之總和、1～2008 中所有數字的十位數碼之總和、1～2008 中所有數字的百位數碼之總和以及 1～2008 中所有數字的千位數碼之總和四個部分之和。

1～2008 中所有數的個位數碼之總和為

(1+2+3+4+5+6+7+8+9)×200+(1+2+3+4+5+6+7+8)=9036

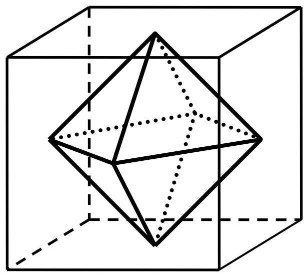
1～2008 中所有數的十位數碼之總和為(1+2+3+4+5+6+7+8+9)×200=9000

1～2008 中所有數的百位數碼之總和為(1+2+3+4+5+6+7+8+9)×200=9000

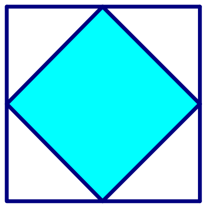
1～2008 中所有數的千位數碼之總和為 1×1000+2×9=1018

故 1～2008 之數碼和的總和為 9036+9000+9000+1018=28054 ANS：28054

4. 連接正立方體各面的中心構成一個正八面體（如圖所示）。已知正立方體之邊長為 12 cm，請問正八面體之體積為多少 cm^3？



用一平行於正立方體底面的平面過此正立方體的中心，將此正立方體與正八面體切為全等的兩半，此時正八面體可視為由底面為正方形的二個全等角錐體，此角錐體之底面積正好等於原正立方體底面積的一半(見下圖)，高正好等於原正立方體邊長的一半。故一個角錐體之體積為 $\frac{1}{3}\times 72\times 6=144\ \ cm^3$，即該正八面體的體積為 288 cm^3。



ANS：288 cm^3

5. 在十進制中，有兩個二位數 $\overline{aa}$、$\overline{bb}$。若 $\left(\overline{aa}\right)^2+\left(\overline{bb}\right)^2=\overline{aabb}$，請問 $\overline{aabb}$ 之值是什麼？

可知 $\overline{aa}=10a+a=11a$、$\overline{bb}=10b+b=11b$ 及 $\overline{aabb}=1100a+11b$。因 $\left(\overline{aa}\right)^2+\left(\overline{bb}\right)^2=\overline{aabb}$，故有 $(11a)^2+(11b)^2=1100a+11b$，即

$$11(a^2+b^2)=100a+b=\overline{a0b}$$

所以 $\overline{a0b}$ 是 11 的倍數，因此可知 $a+b=11$，故有以下幾種可能：

(i) a 與 b 中一數為 9、另一數為 2：此時 $11(a^2+b^2)=11\times 85=935$，矛盾；

(ii) a 與 b 中一數為 8、另一數為 3：此時 $11(a^2+b^2)=11\times 73=803$，故 a=8、b=3；

(iii) a 與 b 中一數為 7、另一數為 4：此時 $11(a^2+b^2)=11\times 65=715$，矛盾；

(iv) a 與 b 中一數為 6、另一數為 5：此時 $11(a^2+b^2)=11\times 61=671$，矛盾；

因此 $\overline{aabb}$ 的值為 8833。

ANS：8833

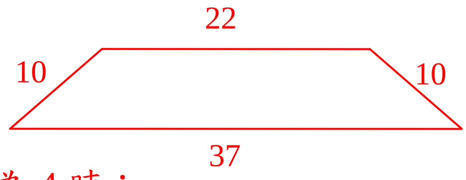
6. 用長度為 2、4、4、10、22 及 37 的六根木棒（木棒要全用上），可以組成多少個不同的等腰梯形？(兩組等腰梯形的四個邊長對應相等視為相同)

因只有 37 為奇數而其餘為偶數，故長度為 37 的木棒不可能為等腰梯形之腰的一部份而必須為等腰梯形之底的一部份。

因 22>2+4+4+10，所以長度為 22 的木棒不可能為等腰梯形之腰的一部份而必須為等腰梯形之底的一部份。

若長度為 37 的木棒與長度為 22 的木棒在同一個底上，則兩腰必為兩根長度為 4 的木棒，此時另一底必須大於 37+22－4×2＝51，但因現在只剩下長度為 2 與 8 的木棒，故不可能發生，也因此長度為 37 的木棒與長度為 22 的木棒必須分別在不同的底上，此時有以下幾種可排出的等腰梯形：

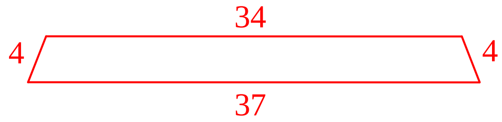
(i) 因 10＝2+4+4 且 37－10－10＝17<22，故兩腰可為 10，此時只可排成一種等腰梯形：



(ii) 若等腰梯形的兩腰為 4 時：

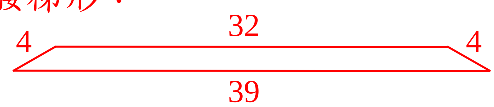
(a) 當長度為 2 的木棒與長度為 10 的木棒都在長度為 37 的木棒所在之底時，因 37+10+2－4－4＝41>22，故此情況不可能發生。

(b) 當長度為 2 的木棒與長度為 10 的木棒都在長度為 22 的木棒所在之底時，因 37－4－4＝29＜22＋10＋2＝34，故此情況可排成等腰梯形：



(c) 當長度為 2 的木棒在長度為 22 的木棒所在之底而長度為 10 的木棒在長度為 37 的木棒所在之底時，因 37+10－4－4＝39>22+2＝24，故此情況不可能發生。

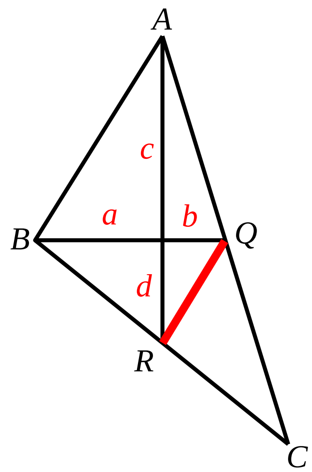
(d) 當長度為 2 的木棒在長度為 37 的木棒所在之底而長度為 10 的木棒在長度為 22 的木棒所在之底時，因 37+2－4－4＝31<22+10＝32，故此情況可排成等腰梯形：



因此共可組成 3 種不同的等腰梯形。

ANS：3 種

7. 三角形 ABC 中，線段 $\overline{AR}$ 、 $\overline{BQ}$ 分別是 $\overline{BC}$ 、 $\overline{AC}$ 邊上的中線，且 $\overline{BQ}$ 與 $\overline{AR}$ 互相垂直，如圖所示。已知 $\overline{AC}=8$、$\overline{BC}=6$。請問 $\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{CA}^2$ 等於多少？



連接線段 $\overline{RQ}$ 。由 $\overline{AR}$ 、 $\overline{BQ}$ 分別是 $\overline{BC}$ 、 $\overline{AC}$ 邊上的中線可知 $\overline{RQ}$ 長度為 $\overline{AB}$ 長度的一半。因 $\overline{AB}^2=a^2+c^2$ 、 $\overline{RQ}^2=b^2+d^2$ ，故有 $\frac{1}{4}(a^2+c^2)=b^2+d^2$ 。因 $\overline{AC}=8$、$\overline{BC}=6$，所以 $\overline{AQ}=4$、$\overline{BR}=3$。由畢氏定理可得 $a^2+d^2=\overline{BR}^2=9$ 、 $c^2+b^2=\overline{AQ}^2=16$ ，所以有

$$a^2+b^2+c^2+d^2=25，$$

$$\frac{5}{4}(a^2+c^2)=25，即\ \frac{5}{4}\overline{AB}^2=25，\overline{AB}^2=20。$$

因此 $\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{CA}^2=20+36+64=120$ 。

ANS：120

8. 在 100 張卡片上不重複地編上 1～100，至少要隨意抽出幾張才能保證所抽出的卡片上的數之乘積可被 12 整除？

12＝3×4，故所抽出的卡片上的數之乘積要被 12 整除必可被 4 整除及可被 3

整除。1～100 中不能被 3 整除的數有 67 張，再多抽 1 張才能保證被 3 整除，而此情況抽出的牌至少有 2 張偶數牌，可保證被 12 整除。所以要被 12 所整除至少需抽出 68 張牌。

ANS：68 張

9. 有 n 個大於 10 的連續正整數，它們的各位數碼和都不可以被 5 整除。在 n 為最大值的情況下，這 n 個連續正整數總和的最小值是什麼？
由複賽應用題第九題可知 n 的最大值為 8，且此時這 8 個連續正整數的個位數依序為 6、7、8、9、0、1、2、3。
若這八個連續正整數皆為二位數時，令第一個數為 $10a+6$，此時數碼和依序為 $6+a$、$7+a$、$8+a$、$9+a$、$a+1$、$a+2$、$a+3$、$a+4$。這八個數都必須同時不為 5 的倍數，故 a 最小為 5，即這八個數為 56、57、58、59、60、61、62、63 且 56+57+58+59+60+61+62+63=476。
若這八個連續正整數至少有 4 個數為為三位數時，此時總和至少為 96+97+98+99+100+101+102+103>476，故最小值為 476。

ANS：476

10. 在一個正十七邊形內部有 10 個點，將這 10 個點及 17 個頂點以線段任意連接，但任意二條線段除了端點以外沒有其它的交點，則此正十七邊形最多可被分割成幾個小三角形？
<解一>
當正十七邊形內部有 1 個點時，則最多分割成 17 個三角形可滿足題意。此後每增加 1 點，都至多可增加 2 個三角形，故正十七邊形內部有 10 個點時，最多可分割出 17+9×2＝35 個三角形。
<解二>
正十七邊形的內角和為 180°×15，因為任意二條線段除了端點以外沒有其它的交點，故內部的每個點都是小三角形的頂點，每個點都提供 360°。
故這些小三角形的內角和為 180°×15+360°×10=6300°，即共有 $\frac{6300°}{180°}=35$ 個小三角形。

ANS：35 個

11. <u>老王</u>現年不超過 60 歲，他有九個小孩。<u>老王</u>發現今年自己年齡的平方正好等於這九個小孩的年齡的平方之總和（所有人的年齡都是正整數），且小孩們的年齡都不相同且正好成等差數列。請問<u>老王</u>今年幾歲？
令<u>老王</u>現年為 w 歲，九個小孩的年紀由小至大依序為 $a-4t$、$a-3t$、$a-2t$、$a-t$、a、$a+t$、$a+2t$、$a+3t$、$a+4t$，其中 $t>0$。故可知

$$w^2=(a-4t)^2+(a-3t)^2+(a-2t)^2+(a-t)^2$$
$$+(a)^2+(a+t)^2+(a+2t)^2+(a+3t)^2+(a+4t)^2,$$

即 $$w^2=9a^2+60t^2$$

<解一>

由題意可得

$$60^2 > w^2 = 9a^2 + 60t^2 > 9a^2$$
$$\Rightarrow 400 > a^2$$

故知 20>a。

因最小的小孩年紀為 $a-4t$，故有 $a-4t>0$，即 $a>4t$，因此可得不等式 $20>4t$，即 $5>t$，又由 $w^2 = 9a^2 + 60t^2$ 可知 t 必為 3 的倍數，所以 $t=3$、$a>12$。

如此可得 $20>a>12$、$t=3$：

(i) $a=13$，此時 $w^2 = 9a^2 + 60t^2 = 9\times169 + 60\times9 = 2061$，這不是平方數，故不合；

(ii) $a=14$，此時 $w^2 = 9a^2 + 60t^2 = 9\times196 + 60\times9 = 2304 = 48^2$，故老王年紀為 48 歲；

(iii) $a=15$，此時 $w^2 = 9a^2 + 60t^2 = 9\times225 + 60\times9 = 2565$，這不是平方數，故不合；

(iv) $a=16$，此時 $w^2 = 9a^2 + 60t^2 = 9\times256 + 60\times9 = 2844$，這不是平方數，故不合；

(v) $a=17$，此時 $w^2 = 9a^2 + 60t^2 = 9\times289 + 60\times9 = 3141$，這不是平方數，故不合；

(vi) $a=18$，此時 $w^2 = 9a^2 + 60t^2 = 9\times324 + 60\times9 = 3456$，這不是平方數，故不合；

(vii) $a=19$，此時 $w^2 = 9a^2 + 60t^2 = 9\times361 + 60\times9 = 3789$，這不是平方數，故不合；

因此老王年紀為 48 歲。

<解二>

$$w^2 = 9a^2 + 60t^2 = 3\left(3a^2 + 20t^2\right)$$

因右式為 3 的倍數，故 w 為 3 的倍數，可令 $w=3k$，如此可得

$$3k^2 = 3a^2 + 20t^2$$

因左式為 3 的倍數，故 t 為 3 的倍數，可令 $t=3h$，如此可得

$$k^2 = a^2 + 60h^2$$

因已知老王現年不超過 60 歲，故有 $w\leqq60$，即 $k\leqq20$，所以 $k^2\leqq400$，換言之 $60h^2\leqq400$，因此 $h=1$ 或 2，即 $t=3$ 或 6。

若 $t=6$，此時因 $a-4t>0$，故 $a>24$；但由 $k^2\leqq400$ 得知 $a^2<400$，即 $a<20$，故此情況不成立。因此 $t=3$，即

$$k^2 = a^2 + 60$$
$$(k+a)(k-a) = 60 = 2^2\times3\times5$$

因 $k = \dfrac{(k+a)+(k-a)}{2}$ 且 k 為正整數，故只須考慮以下二種情形：

(i) $k+a=2\times5$、$k-a=2\times3$：
此時 $k=8$、$a=2$，但此時年紀最小的為 $a-12=2-12<0$，故不合；

(ii) $k+a=2\times3\times5$、$k-a=2$：

此時 $k=16$、$a=14$，此時老王年紀為 48 歲、九個小孩年紀依序為 2、5、8、11、14、17、20、23、26 且 $48^2=2304=2^2+5^2+8^2+11^2+14^2+17^2+20^2+23^2+26^2$，故老王年紀為 48 歲。

ANS：48 歲

12. A、B、C、D、E、F、G 七個人都各有一些珠子。從 A 開始依序進行以下之操作，每次都分給其他六個人與他們當時手中現有珠子數量一樣多的珠子。當 G 操作後，每個人手中都恰各有 256 顆珠子，請問 D 原先有多少顆珠子？

可知珠子共有 256×7 顆。可觀察出以下規律：

(i) 分珠子出去的人所減少的珠子數量為全部珠子數量減去自己手上在分珠子之前所擁有的珠子數量；

(ii) 每一次分完珠子後，除了分珠子的人之外，每個人手上的珠子數為當次分珠子前珠子數量的兩倍。

用逆向思考：

因 G 給完後，每個人手中都恰有 256 顆珠子，所以在 G 分珠子前、F 分完後，A、B、C、D、E、F 各有 $256\div2=128$ 顆珠子；G 有 1024 顆珠子。

因 F 給完後，他手中恰有 128 顆珠子，所以在 F 分珠子前、E 分完後，A、B、C、D、E 各有 $128\div2=64$ 顆珠子；F 有 960 顆珠子；G 有 512 顆珠子。

因 E 給完後，他手中恰有 64 顆珠子，所以在 E 分珠子前、D 分完後，A、B、C、D 各有 $64\div2=32$ 顆珠子；F 有 480 顆珠子；G 有 256 顆珠子；E 有 928 顆珠子。

因 D 給完後，他手中恰有 32 顆珠子，所以在 D 分珠子前、C 分完後，A、B、C 各有 $32\div2=16$ 顆珠子；F 有 240 顆珠子；G 有 128 顆珠子；E 有 464 顆珠子；D 有 912 顆珠子。

而在 C 分完珠子後、D 分珠子前，一共有 A、B、C 三人分過珠子，D 手中的珠子增為原來的 8 倍，故 D 原先有 $912\div8=114$ 顆珠子。

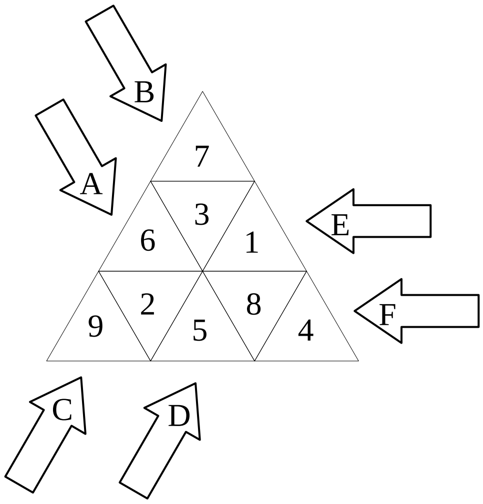
ANS：114 顆

2008 小學數學競賽選拔賽決賽(一)試題

第　二　試: 綜合能力測驗 (考試時間 60 分鐘)

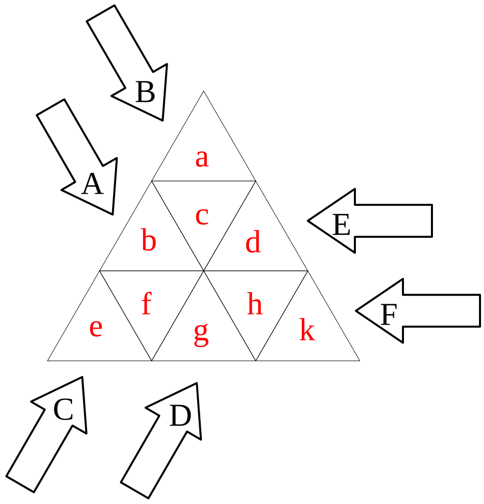
＿＿＿縣市＿＿＿國民小學＿年級　編號：＿＿＿姓名：＿＿＿＿＿性別：＿

1. 將 1、2、3、…、8、9 不重複地填入下圖的每個小正三角形內，箭號 A、B、C、D、E、F 是指在此箭號所經的直線上所有小正三角形內的數之乘積。例如



A＝6×2×5＝60
B＝7×3×1×8×4＝672
C＝9×2×6×3×7＝2268
D＝5×8×1＝40
E＝1×3×6＝18
F＝4×8×5×2×9＝2880
A+B+C+D+E+F＝5938

請找出一種填入方法，使得 A+B+C+D+E+F 之值最小。請問 A+B+C+D+E+F 之最小值是多少？



如右圖，可將這六條箭頭所經的直線分成二類，B、C、F 有 5 個數相乘而 A、D、E 有 3 個數相乘。觀察可知可將這 9 個位置分成三種情形：

(i)　a、e、k 僅有二條 5 個數相乘的直線經過；

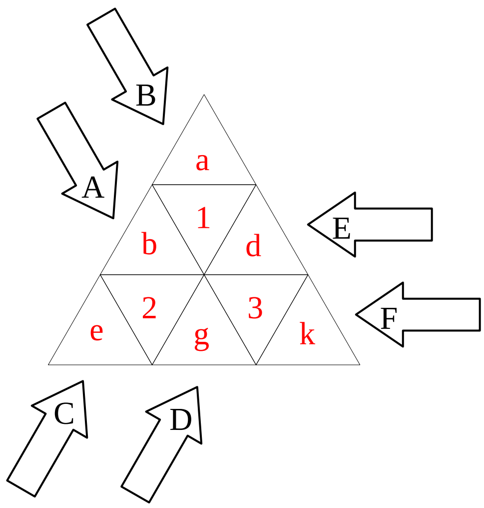
(ii)　c、f、h 有一條 3 個數相乘的直線與二條 5 個數相乘的直線經過；

(iii)　b、d、g 有一條 5 個數相乘的直線與二條 3 個數相乘的直線經過；

故將 1～9 由小到大分成三組數：

(1、2、3)、(4、5、6)、(7、8、9)。

由操作方法可知在角落位置的 a、e、k 各在二條箭頭所經的直線上而在中間位置的 b、c、d、h、g、f 各在三條箭頭所經的直線上，因要找出最小值，故(1、2、3)要放進中間位置；而因中間位置的 c、f、h 有二條 5 個數相乘的直線經過，故(1、2、3)要放在這三個位置。此為對稱圖形，不妨令 c=1、f=2、h=3。此時有：(完成此步驟給五分)

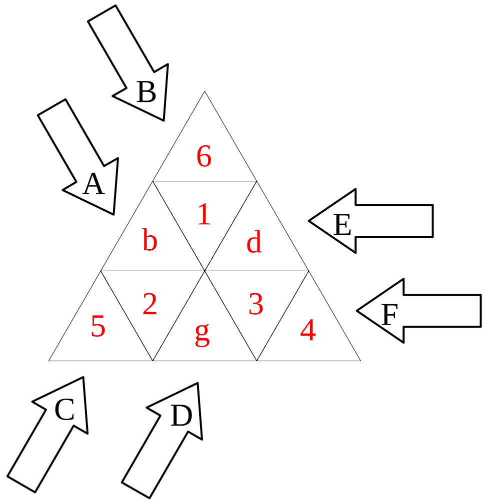


B＝3adk
F＝6egk
C＝2abe

接著在三條 5 個數相乘的直線中，a、e、k 出現二次而 b、d、g 僅出現一次，故要將(4、5、6)放在 a、e、k 的位置而(7、8、9)放在 b、d、g 的位置。

因 4×5＝20、4×6＝24、5×6＝30，為了要分別使 B、F、C 盡量小，所以取 a=6、e=5、k=4，此時有：(完成此步驟再給十分)

B＝72d；F＝120g；C＝30b



一樣了要分別使 B、F、C 盡量小，所以取 b=9、d=8、g＝7，此時有

A＝9×2×7＝126

B＝6×1×8×3×4＝576

C＝5×2×9×1×6＝540

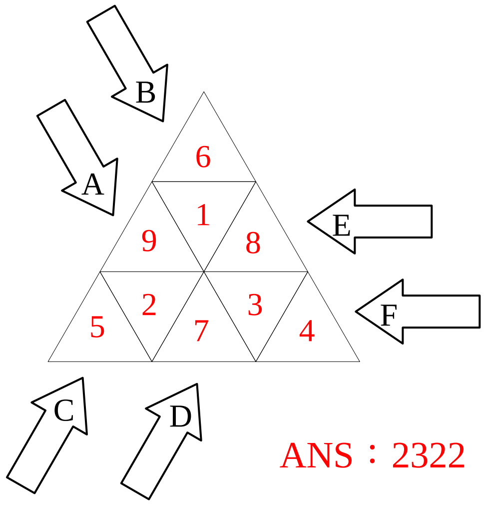
D＝7×3×8＝168

E＝8×1×9＝72

F＝4×3×7×2×5＝840

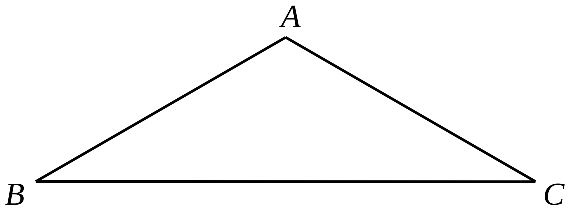
A+B+C+D+E+F＝2322

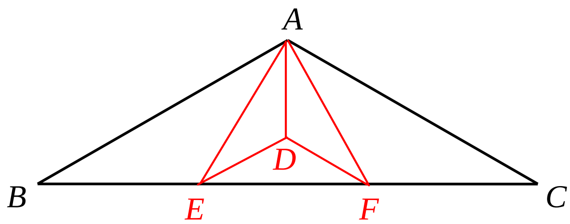
(完成此步驟再給十分)



ANS：2322

2. 三角形 ABC 中，$\angle ABC = \angle ACB = 30^\circ$。請將三角形 ABC 切為 5 個都與三角形 ABC 相似的三角形，並證明您的切法符合要求。





(i) 因 $\angle ABC = \angle ACB = 30^\circ$，故 $\angle BAC = 120^\circ$，因此作過 A 點作 $\overline{AE}$ 與 $\overline{BC}$ 交於 E 點，使得 $\angle BAE = 30^\circ = \angle ABE$，所以$\triangle ABC$ 與$\triangle EBA$ 相似。

(ii) 作過 A 點作 $\overline{AF}$ 與 $\overline{BC}$ 交於 F 點，使得 $\angle CAF = 30^\circ = \angle ACF$，所以$\triangle ABC$ 與$\triangle FAC$ 相似，且$\triangle EBA$ 與$\triangle FAC$ 相似。

(iii) 此時$\triangle AEF$ 的內角都是 60°，為正三角形，作出$\triangle AEF$ 的內心 D（即內角平分線的交點)，則可得到三個內角都是 30°-30°-120° 的三個相似三角形：$\triangle ADE$、$\triangle ADF$、$\triangle EFD$。

因$\triangle EBA$ 與$\triangle FAC$ 也是三個內角為 30°-30°-120° 的三角形，故$\triangle ADE$、$\triangle ADF$、$\triangle EFD$、$\triangle EBA$ 與$\triangle FAC$ 為五個都與$\triangle ABC$ 相似的三角形。

(切法正確給十分，證明切法符合要求給十五分)

3. 有三位賭客與一位莊家對賭，遊戲規則如下：賭客每次每人各投注 1 元，每一位賭客面前各有標記 1、2、3、⋯、10、11、12 的十二張牌（號碼朝下使賭客看不見號碼），賭客任抽一張給莊家，賭客不可以看自己牌上的號碼，而莊家則依照賭客所抽牌上的號碼拿一頂貼有此號碼的帽子戴在賭客的頭上，賭客可看見所有其他人帽子上的號碼，但看不見他們自己帽子上的號碼。在每位賭客面前都有三個按鈕：奇數、偶數及 PASS 不猜，每位賭客可自由選擇猜自己的牌是奇數或偶數，也可以選擇 PASS 不猜。賭客之間彼此不得互相交談，也不得知道別人猜什麼或不猜。如果三位賭客全按 PASS 不猜或有任一人猜錯，則沒收全部賭資；若至少有一位賭客猜，且猜的人全部都猜對，則莊家賠給每位賭客 1 元。請問這三位賭客有沒有辦法在事先約定一個數學策略，使得他們獲勝的機會保證

(i) 不小於 50%？（10 分） 不小於 75%？（15 分）

(i) 三人可約定只由一個人猜，其它兩人都 PASS 不猜。設猜的人為賭客 A，不論賭客 A 猜奇或偶的獲勝機率都是 50%，所以獲勝機率不小於 50%。

(ii) 三人可約定的數學策略如下：若知道另兩人的牌均為奇數時按偶數鈕；若知道另兩人的牌均為偶數時按奇數鈕；若知道另兩人的牌為一奇一偶時要按 PASS 不猜。

三人拿到的牌之奇偶性有八種情形，每一種情形的回應狀況如下表：

	A	B	C	勝負狀況
牌之奇偶性	奇	奇	奇	負
回應狀況	偶	偶	偶	
牌之奇偶性	奇	奇	偶	勝
回應狀況	╳	╳	偶	
牌之奇偶性	奇	偶	奇	勝
回應狀況	╳	偶	╳	
牌之奇偶性	偶	奇	奇	勝
回應狀況	偶	╳	╳	
牌之奇偶性	奇	偶	偶	勝
回應狀況	奇	╳	╳	
牌之奇偶性	偶	奇	偶	勝
回應狀況	╳	奇	╳	
牌之奇偶性	偶	偶	奇	勝
回應狀況	╳	╳	奇	
牌之奇偶性	偶	偶	偶	負
回應狀況	奇	奇	奇	

因在全部八種狀況中使用此策略有六種狀況可獲勝，故獲勝機率為 75%，即獲勝機率不小於 75%。(出現任何違反規則的動作如偷窺、偷傳信號等均以 0 分計，策略正確給佔分 3/5 的分數，證明策略符合要求給佔分 2/5 的分數)

4. 12 個外形如的外星人造訪地球，藏身在右圖中。請找出他們，並把它們塗色或用粗筆圈起來（不得使用紅色筆)。每正確找到一隻得 2 分，每錯誤一個倒扣 2 分直到 0 分為止，全部找到共得 25 分。