

2008 年青少年數學國際城市邀請賽

參賽代表遴選複賽

個人數學競賽試題

編號: _____ 校名: _____ 國中 _____ 姓名: _____

作答時間: 二小時

第一部分: 填充題, 每小題 5 分, 共 60 分

(注意: 請將答案直接填入各題預留空白處, 不須列出計算過程)

1. $\frac{2008}{1000} + \frac{2008}{1001} + \frac{2008}{1002} + \frac{2008}{1003} + \frac{2008}{1004} + \frac{2008}{1005} + \frac{2008}{1006} + \frac{2008}{1007} + \frac{2008}{1008} + \frac{2008}{1009}$ 所得結果的整數部分為 _____。

2. 計算 $\underbrace{99 \dots 9}_{99 \text{ 個}} \times \underbrace{99 \dots 9}_{99 \text{ 個}} + 1 \underbrace{99 \dots 9}_{99 \text{ 個}}$ 之值為 _____。

3. 今有 n 個自然數 (可以相等), 其中任何 7 個數之和都小於 15, 已知 n 個自然數之和為 100, 則 n 的最小值是 _____。

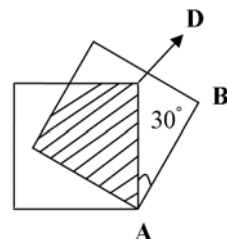
4. 設 m 為 13 的倍數且由 4017 個數碼組成, 前面 2008 個以及後面的 2008 個數碼都是 7, 則正中間的數碼是 _____。

5. 若 $f(x) = (2x^5 + 2x^4 - 53x^3 - 57x + 54)^{2008}$, 則 $f\left(\frac{\sqrt{111}-1}{2}\right)$ 之值為 _____。

6. 設 P 為正方形 $ABCD$ 內的一點, 已知邊長 $AB=2$, 且 P 到正方形 \overline{AB} 的兩端點 A 、 B , 以及到對邊 \overline{CD} 的距離都相等, 若 d 表示這個相同的距離, 則 $d=$ _____。

7. 已知方程式 $x^2 - 8x + m + 6 = 0$ 有兩個相等實根, 且它的根是 $\triangle ABC$ 的 \overline{BC} 邊長, 若 $\triangle ABC$ 的面積為 6, 則它的重心 G 到 \overline{BC} 的距離為 _____。

8. 設兩個邊長皆為 1 的正方形有一頂點 A 重合, 重疊部分如下圖斜線所示, 其中 \overline{AB} 和 \overline{AD} 的夾角為 30° , 則重疊部分的面積為 _____。



9. 正整數 2008 的數碼和為 10, 則數碼和為 10 的四位數共有 _____ 個。

10. 某人的年齡是兩位數，如把兩個數碼換位，則等於他父親的年齡。有人發現，如將父子其中一人之的年齡加 1，可得父親的年齡是兒子的年齡之兩倍。但這樣得出的兒子年齡有兩種可能，則兒子兩個可能年齡值之差為_____。
11. 小王以勻速從向下運行的電扶梯最頂端走到最低端共走了 50 階，小丁以 3 倍於小王的勻速從向下運行的電扶梯最頂端走到最低端共走了 75 階。當電扶梯停止運行時，則此電扶梯從最頂端到最低端共有_____階。
12. 設 m, n 為二個不同的正整數，若 $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{2}{5}$ ，則 $m+n$ 的值為_____。

第二部分：計算證明，每題 20 分,共 60 分

(注意：請在本試卷正反面空白處依題號作答，須詳列計算過程及說明理由)

1. 平面上有 2008 個相異點，每兩個相異點連結成一條線段，並把該線段中點塗上紅色：
- (1) 證明平面上紅色點的個數不小於 4013；
 - (2) 請設計一種特殊情況，使得塗上紅色點的個數恰好等於 4013 個。
2. 有九輛越野車要深入沙漠探險，每輛車的油箱都最多可加滿一桶汽油，而加一桶汽油可行駛 400 公里，每輛車上最多可再載運 9 桶汽油。未加入汽車油箱內的汽油可隨意整桶加入油箱或整桶轉至別輛汽車，但不可丟在路上。所有的車都加滿油後由沙漠東部的邊緣出發向西方行駛，除加油外都不停止，而中途並無加油站，且每輛車最後都必須回到原出發點(不須同時)。請問該車隊有一輛車最遠可深入沙漠多少公里？(您必須 1. 證明您所給的最遠答案是無法更遠；2. 給出達成最遠的方案。)
3. 已知四邊形 $ABCD$ 內接於一圓，點 E 與點 D 分別在 BC 的異側，點 F 與點 D 分別在 AB 的異側，如圖所示。若 $CE=CD$ ， $CE//AB$ ，且 $AF=AD$ ， $AF//BC$ 。試證 $\angle EDF=90^\circ$ 。

