

2008 年青少年數學國際城市邀請賽

參賽代表遴選決賽

個人數學競賽試題

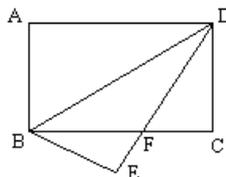
編號: _____ 校名: _____ 國中 _____ 姓名: _____

作答時間: 二小時

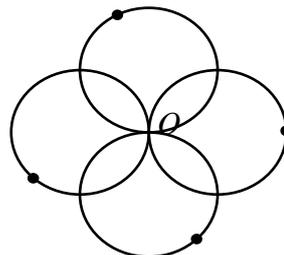
第一部分: 填充題, 每小題 5 分, 共 60 分

(注意: 請將答案直接填入各題預留空白處, 不須列出計算過程)

1. 設正整數 a_1, a_2, \dots, a_{49} 的和為 999, 令 d 為 a_1, a_2, \dots, a_{49} 的最大公因數, 則 d 可能的最大值為 _____。
2. 設 $a = 9 + 99 + 999 + \dots + \underbrace{999 \dots 99}_{\text{共有 2008 個 9}}$, 則 a 這個數中出現數碼 "1" 的次數共有 _____ 次。
3. 已知實數 a, b, c 滿足 $a = \sqrt{2} + b, 2ab + 2\sqrt{2}c^2 + 1 = 0$, 則 $a + b + c =$ _____。
4. 設 a 為實數, 已知方程式 $4x^2 - 4(a-1)x + a^2 - 7 = 0$ 的二根之差為 2, 則 $a =$ _____。
5. 如圖, 長方形 $ABCD$ 中, $\overline{AB} = 4, \overline{BC} = 8$, 將此長方形沿著對角線 \overline{BD} 摺疊使得 A 點落在 E 點上 (即 $\triangle ABD$ 與 $\triangle EBD$ 全等), 且 \overline{DE} 交 \overline{BC} 於 F 點, 則 $\triangle CEF$ 面積為 _____。



6. 有一組連續的正整數 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ 其總和為 1000, 那麼這組數最多的個數為 _____。
7. 若一個數只由 0、6、8、9 四個數碼組成稱為荷里藍數, 前 16 個正的荷里藍數由小到大依序為 6、8、9、60、66、68、69、80、86、88、89、90、96、98、99、600。則第 2008 個正的荷里藍數是 _____。
8. 有四隻小蟲分別沿著如圖所示的四個相交於一點的圓環爬行, 它們同時由 O 點出發, 爬行的速度分別為每小時爬 6 圈、9 圈、12 圈及 15 圈。則這四隻小蟲第一次同時在 O 點相遇的時間是在多少小時之後 _____。



9. 小珍約她的朋友小妮出去玩，小妮的父親規定她至多只能出門 8 個小時。她們從小妮家門口跳上一輛時速為 20 公里的巴士，在某處下車後再以時速為 5 公里步行回家。如果要使得小妮可以依父親規定之前回到家，則她們下車處最遠可以距離小妮家_____公里。
10. 設 G 為 $\triangle ABC$ 的重心，已知 $GA = 2\sqrt{3}$ ， $GB = 2\sqrt{2}$ 且 $GC = 2$ ，則 $\triangle ABC$ 的面積=_____。
11. 設四位數 $\overline{a_1a_2a_3a_4}$ 大於 5000，當此四位數的左邊寫上 400 後成為一個平方數，則四位數 $\overline{a_1a_2a_3a_4} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
12. 設 a, b 為正整數，且使 $3^a + 81 = b^2$ ，則 $a + b$ 之值為_____。

第二部分：計算證明，每題 20 分，共 60 分

(注意：請在本試卷正反面空白處依題號作答，須詳列計算過程及說明理由)

1. 建志中學的校車在距離學校 10 公里處拋錨了，車上一共有 12 位學生。路旁只有一輛可載 4 人的小汽車可以協助來回穿梭接駁，開始時 8 人步行，而小汽車先載 4 人至途中把他們放下再折返接 4 人，在途中又把他們放下再折返接另外的 4 人，最後這 12 位學生全部同時抵達學校。假設小汽車的時速為 20 公里，所有學生的步行時速均為 4 公里，請問從開始出發到抵達學校這輛小汽車共行駛多少公里？
2. 若一個質數的各位數碼經任意排列後仍然是質數，則稱它是一個“絕對質數”。例如：2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 31, 37, 71, 73, 79, 97, 113, 131, 199, 311, 337, 373, 733, 919, 991, ... 都是絕對質數。求證：絕對質數的數碼中不可能同時含有三個數碼 a 且有二個數碼 b ，其中 $a \neq b$ ，且 $a, b \in \{1, 3, 7, 9\}$ 。
3. 將一個 101×99 的方格表如西洋棋盤那樣黑白相間塗色，連接它的對角線，此對角線被分割成許多落在黑色或白色小方格內的線段。已知每個小方格的邊長為 1，試求此對角線落在黑色小方格內的線段長度之總和與落在白色小方格內的線段長度之總和的比值。

