2008年青少年數學國際城市邀請賽

參賽代表遴選決賽

個人數學競賽試題

編號:____________校名:______________ 國中　　　姓名:_________________

作答時間: 二 小 時

第一部分：填充題，每小題5分，共60分

(注意：請將答案直接填入各題預留空白處，不須列出計算過程)

1. 設正整數 $a_1,a_2,...,a_{49}$ 的和為999，令 d 為 $a_1,a_2,...,a_{49}$ 的最大公因數，則 d 可能的最大值為 ___9___。

【參考解法】

因 d 為 $a_1,a_2,...,a_{49}$ 的最大公因數且 $a_1+a_2+...+a_{49}=999$，故知 d 必為999的因數。令 $a_k=db_k$，其中 $1\le k\le 49$。因 $a_1,a_2,...,a_{49}$ 皆為正整數，故知 $b_1,b_2,...,b_{49}$ 也必為正整數，因此 $b_1+b_2+...+b_{49}\ge 49$。因 $d(b_1+b_2+...+b_{49})=999=3^3\times 37$，故知 $b_1+b_2+...+b_{49}$ 至少為 3×37，也因此 d 可能的最大值為9。

2. 設 $a=9+99+999+\cdots+\underbrace{999\cdots99}_{\text{共有2008個9}}$，則 a 這個數中出現數碼”1”的次數共有___2005___次。

【參考解法】

$$\begin{aligned}a&=9+99+999+\cdots+\underbrace{999\cdots99}_{\text{共有2008個9}}\\&=(10-1)+(100-1)+(1000-1)+\cdots+(1\underbrace{000\cdots00}_{\text{共有2008個0}}-1)\\&=\underbrace{111\cdots11}_{\text{共有2008個1}}0-2008\\&=\underbrace{111\cdots11}_{\text{共有2004個1}}09102\end{aligned}$$

因此 a 這個數中出現數碼”1”的次數共有 2004+1＝2005 次。

3. 已知實數 a,b,c 滿足 $a=\sqrt{2}+b,\ 2ab+2\sqrt{2}\ c^2+1=0$，則 $a+b+c=$ ______0______。

【參考解法】

由 $a=\sqrt{2}+b$ 可知 $a-b=\sqrt{2}$，兩邊平方後可得 $2ab=a^2+b^2-2$，代入 $2ab+2\sqrt{2}c^2+1=0$ 後可知 $1=a^2+b^2+2\sqrt{2}c^2$，再代入 $2ab+2\sqrt{2}c^2+1=0$ 後可得 $(a+b)^2+4\sqrt{2}c^2=0$，據此可判斷出 $a=-b$ 與 $c=0$，故 $a+b+c=0$。

4. 設 a 為實數，已知方程式 $4x^2-4(a-1)x+a^2-7=0$ 的二根之差為2, 則 $a=$ ____2____。

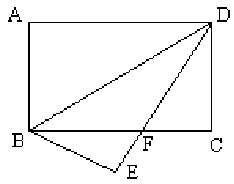
【參考解法】

由根與係數的關係可知二根之積為 $\dfrac{a^2-7}{4}$、二根之和為 $a-1$，故可得

$$2^2=(a-1)^2-4\times\frac{(a^2-7)}{4}$$

解方程式後可算得 a=2。

5. 如圖，長方形 $ABCD$ 中，$\overline{AB}=4,\ \overline{BC}=8$，將此長方形沿著對角線 $\overline{BD}$ 摺疊使得 A 點落在 E 點上（即 ΔABD 與 ΔEBD 全等），且 $\overline{DE}$ 交 $\overline{BC}$ 於 F 點，則 ΔCEF 面積為__3.6___。



【參考解法】

由 $\angle BEF=90^\circ=\angle DCF$、$\angle EFB=\angle CFD$、$\overline{BE}=4=\overline{DC}$ 可知 $\triangle BEF$ 與 $\triangle DCF$ 全等，因此 $\overline{BF}=\overline{DF}$。令 $\overline{BF}=\overline{DF}=a$，則 $\overline{CF}=8-a$ 且由勾股定理可知 $(8-a)^2+4^2=a^2$，解方程式可知 a=5、$\overline{CF}=3$。因 $\triangle BEF$ 與 $\triangle CEF$ 的面積比為 $\overline{BF}:\overline{CF}=5:3$，故 $\triangle CEF$ 的面積為 $\frac{1}{2}\times 3\times 4\times\frac{3}{5}=\frac{18}{5}=3.6$。

6. 有一組連續的正整數 $a_1,a_2,a_3,...,a_n$ 其總和為 1000，那麼這組數最多的個數為__25___。

【參考解法】

已知 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=1000=2^3\times 5^3$。若 n 為奇數，則 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=n\times a_{\frac{n+1}{2}}$：

(i) n=125，則 $a_{\frac{n+1}{2}}=a_{63}=8$，即 $a_1,a_2,a_3,...,a_{55}$ 皆不是正整數，故不合；

(ii) n=25，則 $a_{\frac{n+1}{2}}=a_{13}=40$，即 $a_1=28,a_2=29,a_3=30,\cdots,a_{25}=52$；

(iii) n=5，則 $a_{\frac{n+1}{2}}=a_3=200$，即 $a_1=198,a_2=199,a_3=200,a_4=201,a_5=202$；

若 n 為偶數，則 $2(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n)=n\times\left(a_{\frac{n}{2}}+a_{\frac{n}{2}+1}\right)$ 且 $a_{\frac{n}{2}}+a_{\frac{n}{2}+1}$ 必為奇數：

(i) $a_{\frac{n}{2}}+a_{\frac{n}{2}+1}$=125，則 $n=16$，即 $a_8+a_9=125$，可得 $a_8=62$、$a_9=63$，即 $a_1=55,a_2=56,a_3=57,\cdots,a_{16}=70$；

(ii) $a_{\frac{n}{2}}+a_{\frac{n}{2}+1}$=25，則 $n=80$，即 $a_{40}+a_{41}=25$，可得 $a_{40}=12$、$a_{41}=13$，即 $a_1,a_2,a_3,...,a_{28}$ 皆不是正整數，故不合；

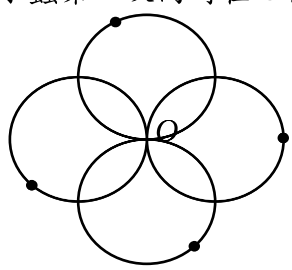
(iii) $a_{\frac{n}{2}}+a_{\frac{n}{2}+1}$=5，則 $n=400$，即 $a_{200}+a_{201}=5$，可得 $a_{200}=2$、$a_{201}=3$，即 $a_1,a_2,a_3,...,a_{198}$ 皆不是正整數，故不合。　故可知最多有 25 個連續正整數其總和為 1000。

7. 若一個數只由 0、6、8、9 四個數碼組成稱為荷里藍數，前 16 個正的荷里藍數由小到大依序為 6、8、9、60、66、68、69、80、86、88、89、90、96、98、99、600。則第 2008 個正的荷里藍數是_699680_。

【參考解法】

將 2008 化為四進制後為 133120_4，由前 16 個正的荷里藍數可知若把 6 視為四進制的 1、8 視為四進制的 2、9 視為四進制的 3、0 仍視為四進制的 0，則可得到第 2008 個正的荷里藍數為 699680。

8. 有四隻小蟲分別沿著如圖所示的四個相交於一點的圓環爬行，它們同時由 O 點出發，爬行的速度分別為每小時爬 6 圈、9 圈、12 圈及 15 圈。則這四隻小蟲第一次同時在 O 點相遇的時間是在多少小時之後___$\frac{1}{3}$ 小時___。



【參考解法】

設 k 小時後第一次相遇，此時可知四隻小蟲分別爬了 $6k$ 圈、$9k$ 圈、$12k$ 圈及 $15k$ 圈。因圈數必為整數，故知若 k<1 時，則 k 必同時整除 6、9、12、15。因 6、9、12、15 的最大公因數為 3，故 k=1/3。

9. <u>小珍</u>約她的朋友<u>小妮</u>出去玩，<u>小妮</u>的父親規定她至多只能出門 8 個小時。她們從<u>小妮</u>家門口跳上一輛時速為 20 公里的巴士，在某處下車後再以時速為 5 公里步行回家。如果要使得<u>小妮</u>可以依父親規定之前回到家，則她們下車處最遠可以距離<u>小妮</u>家__32___公里。

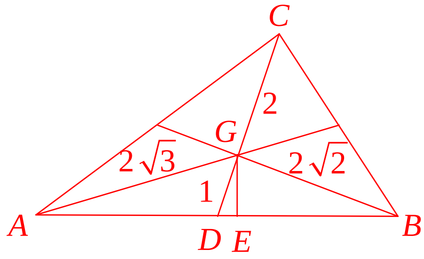
【參考解法】

因步行與巴士的速度比為 5：20＝1：4，故步行與搭巴士的時間比應為 4：1，即搭巴士的時間應為$8\times\dfrac{1}{1+4}=\dfrac{8}{5}$小時，即最遠距離為$\dfrac{8}{5}\times 20=32$公里。

10. 設 G 為 ΔABC 的重心，已知 $GA=2\sqrt{3}$，$GB=2\sqrt{2}$ 且 $GC=2$，則 ΔABC 的面積=_$6\sqrt{2}$_。

【參考解法 1】

由題意可畫出右圖，令 D 為 $\overline{AB}$ 中點、$\overline{GE}\perp\overline{AB}$。因 G 為重心，可知 $\overline{GD}=\dfrac{1}{2}\overline{GC}=1$。



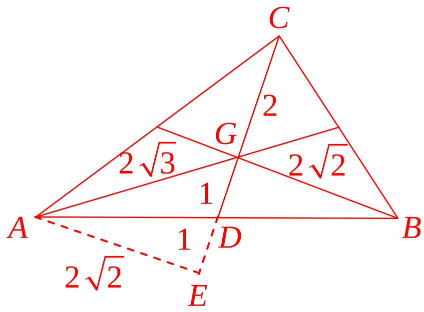
由勾股定理可知$\begin{cases}\overline{GE}^2=\overline{GB}^2-\overline{EB}^2 & \cdots\cdots(1)\\ \overline{GE}^2=\overline{GA}^2-\overline{EA}^2 & \cdots\cdots(2)\\ \overline{GE}^2=\overline{GD}^2-\overline{DE}^2 & \cdots\cdots(3)\end{cases}$

令 $\overline{AD}=\overline{BD}=c$。

由(1) 式與(2) 式可得$\left(2\sqrt{3}\right)^2-\left(c+\overline{DE}\right)^2=\left(2\sqrt{2}\right)^2-\left(c-\overline{DE}\right)^2$，化簡後可得 $c\times\overline{DE}=1$，即 $\overline{DE}=\dfrac{1}{c}$，代入(3) 式後得 $\overline{GE}^2=1-\dfrac{1}{c^2}$，再代入(1)式可得$1-\dfrac{1}{c^2}=8-\left(c-\dfrac{1}{c}\right)^2$，解方程式可得 c=3、$\overline{GE}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$，故△$ABC$ 的面積＝6×△GBD 的面積＝$6\times\dfrac{1}{2}\times 3\times\dfrac{2\sqrt{2}}{3}=6\sqrt{2}$

【參考解法 2】

由題意可畫出右圖，令 D 為 $\overline{AB}$ 中點。在 $\overline{GD}$ 的延長線上取 E 點使得 $\overline{GD}=\overline{DE}$，因此△$GBD$ 之面積為△AEG 之面積的一半。此時因 $\overline{AB}$ 與 $\overline{GE}$ 互相平分，可知四邊形 $AEBG$ 為平行四邊形，也因此可知 $\overline{AE}=\overline{GB}=2\sqrt{2}$，即△$AEG$ 的三邊長為 2、$2\sqrt{2}$、$2\sqrt{3}$，故可知△AEG 為直角三角形，故△GBD 的面積為$\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}\times 2\sqrt{2}\times 2=\sqrt{2}$，所以△$ABC$ 的面積＝6×△GBD 的面積＝$6\sqrt{2}$。



11. 設四位數 $\overline{a_1a_2a_3a_4}$ 大於 5000，當此四位數的左邊寫上 400 後成為一個平方數，則四位數 $\overline{a_1a_2a_3a_4}$ =__8004__。

【參考解法】

由題意可假設 $\overline{a_1a_2a_3a_4}+4000000=A^2$，即 $\overline{a_1a_2a_3a_4}=(A-2000)(A+2000)$，可知 A>2000。因 $\overline{a_1a_2a_3a_4}$ 與 $(A+2000)$ 為四位數，故 $(A-2000)$ 為個位數，即 A=2000+k，其中 0<k<10。此時因 $(A+2000)=4000+k$，故可知 k<3。若 k=1，則 $\overline{a_1a_2a_3a_4}=4001$，不合，故得 k=2，即 $\overline{a_1a_2a_3a_4}=8004$。

12. 設 a,b 為正整數，且使 $3^a+81=b^2$，則 $a+b$ 之值為___23___。

【參考解法 1】

$3^a=b^2-81=(b+9)(b-9)$，故可設 $(b+9)=3^k$、$(b-9)=3^h$，其中 $a=k+h$。因此可得 $3^k-9=b=3^h+9$，即 $3^k=2\times3^2+3^h=3^2(2+3^{h-2})$，所以可知 $h=2$、$k=3$，故 $a=5$、$b=18$，$a+b=23$。

【參考解法 2】

$3^a+81=b^2\Rightarrow 3^a+3^4=b^2\Rightarrow 3^4(3^{a-4}+1)=b^2$，故 $a=5$、$b=18$，$a+b=23$。

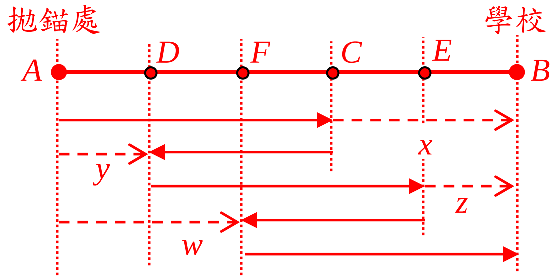
第二部分：計算證明，每題 20 分,共 60 分

(注意：請在本試卷正反面空白處依題號作答，須詳列計算過程及說明理由)

1. 建志中學的校車在距離學校 10 公里處拋錨了，車上一共有 12 位學生。路旁只有一輛可載 4 人的小汽車可以協助來回穿梭接駁，開始時 8 人步行，而小汽車先載 4 人至途中把他們放下再折返接 4 人，在途中又把他們放下再折返接另外的 4 人，最後這 12 位學生全部同時抵達學校。假設小汽車的時速為 20 公里，所有學生的步行時速均為 4 公里，請問從開始出發到抵達學校這輛小汽車共行駛多少公里？

【參考解法】

如圖，假設 A 點為巴士拋錨處、B 點為學校、小汽車第一次載 4 個人在 C 點放下他們自行走路去學校 B 點，折回後在 D 點載另外 4 人，在 E 點放下他們自行走路去學校 B 點，再折回後在 F 點載最後 4 人回到學校 B 點。



令 $CB=x$ 公里、$AD=y$ 公里、$EB=z$ 公里、$DF=w$ 公里。

由於小汽車速度為步行的 $\frac{20}{4}=5$ 倍，故可知：(給 5 分)

(i) $AC+CD=5AD$，即 $AC+CD=5y$。因 $AC=AD+CD=y+CD$，故 $CD=2y$、$AC=3y$；

(ii) $DE+EF=5DF$，即 $DE+EF=5w$。因 $DE=DF+EF=w+EF$，故 $EF=2w$、$DE=3w$；

(iii) $EF+FB=5EB$，即 $EF+FB=5z$。因 $FB=EF+EB=EF+z$，故 $EF=2z$、$FB=3z$。

由(ii)、(iii)可得 $w=z$。(給 5 分)

汽車由第一次到達 C 點至抵達 B 點所需的時間與第一批人下車後至抵達 B 點所需的時間相同，故有 $5x=2y+3z+2z+3y$，即 $5x=2y+8z$；

由於對稱關係（$\frac{10-x}{20}+\frac{x}{4}=\frac{10-AF}{20}+\frac{AF}{4}\Rightarrow AF=x$）可知 $AF=CB$，即 $x=y+w=y+z$，故可得 $y=z$、$x=2y$。(給 5 分)

因此有 $10=AB=AC+CB=3y+2y=5y$，即 $y=2$、$x=4$，可得 $AC=6$ 公里、$CD=4$ 公里、$DF=6$ 公里、$EF=4$ 公里、$FB=6$ 公里，所以小汽車共行駛 6+4+6+4+6=26 公里。

ANS：26 公里(給 5 分，只給正確答案共給 5 分)

2. 若一個質數的各位數碼經任意排列後仍然是質數，則稱它是一個“絕對質數”。例如：2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 31, 37, 71, 73, 79, 97, 113, 131, 199, 311, 337, 373, 733, 919, 991,…都是絕對質數。求證：絕對質數的數碼中不可能同時含有三個數碼 a 且有二個數碼 b，其中 $a\neq b$，且 $a,b\in\{1,3,7,9\}$。

【參考解法】

設 N 是同時含有三個數碼 a 且有二個數碼 b 的絕對質數，其中 $a \neq b$，$a,\ b \in \{1, 3, 7, 9\}$。則 N 可表示為 $\overline{c_m \cdots c_5 aaaaa} + (b-a)(10^i + 10^j)$，其中 $4 \geq i \geq j \geq 0$。(給 5 分)

令 $K_0 = 10^4+10^1$，$K_1 = 10^3+10^2$，$K_2 = 10^3+10^1$，$K_3 = 10^2+10^0$，$K_4 = 10^1+10^0$，$K_5 =10^4+10^0$，$K_6 = 10^4+10^2$ 被 7 除所得的餘數分別是 0，1，2，3，4，5，6，因為 $b-a \neq 0$ 或 7，故 $(b-a)K_0$，$(b-a)K_1$，$(b-a)K_2$，$(b-a)K_3$，$(b-a)K_4$，$(b-a)K_5$，$(b-a)K_6$ 被 7 除所得的餘數也分別是 0，1，2，3，4，5，6，所以，如下的 7 個正整數(給 10 分)

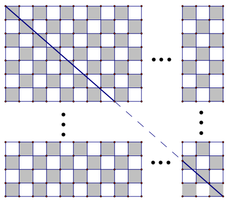
$$N_0 = \overline{c_m \cdots c_5 aaaaa} + (b-a)K_0,$$
$$N_1 = \overline{c_m \cdots c_5 aaaaa} + (b-a)K_1,$$
$$\vdots$$
$$N_6 = \overline{c_m \cdots c_5 aaaaa} + (b-a)K_6,$$

中一定有一個能被 7 整除，這個數就不是質數，這與 N 是絕對質數矛盾。(給 5 分)

故絕對質數不可能同時含有三個數碼 a 且有二個數碼 b，其中 $a \neq b$，$a,\ b \in \{1, 3, 7, 9\}$。

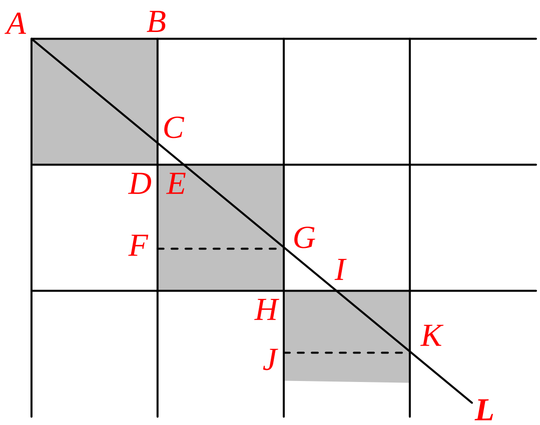
3. 將一個 101×99 的方格表如西洋棋盤那樣黑白相間塗色，連接它的對角線，此對角線被分割成許多落在黑色或白色小方格內的線段。已知每個小方格的邊長為 1，試求此對角線落在黑色小方格內的線段長度之總和與落在白色小方格內的線段長度之總和的比值。

【參考解法 1】



若將 101×99 的矩形從中分成上下兩個部分，由於矩形是中心對稱圖形且該矩形為 101×99，可知在上半部的對角線與在下半部的對角線落在黑色小方格內的線段長度之總和相等。(給 5 分)

如右圖，L 為 101×99 的矩形之對角線：



令 L 的長度為 m，則 $\overline{AC} = \overline{CG} = \overline{GK} = \cdots = \dfrac{m}{101}$。

(i) 因 $\overline{AB} = 1$，可知 $\overline{BC} = \dfrac{99}{101}\overline{AB} = \dfrac{99}{101}$，因此

$\overline{CD} = 1 - \dfrac{99}{101} = \dfrac{2}{101}$；

(ii) 因 $\overline{GF} = 1$，可知 $\overline{CF} = \dfrac{99}{101}$，故

$\overline{DF} = \dfrac{99}{101} - \dfrac{2}{101} = \dfrac{97}{101}$，即 $\overline{EG} = \dfrac{97}{99}\overline{CG}$、

$\overline{GH} = 1 - \dfrac{97}{101} = \dfrac{4}{101}$；

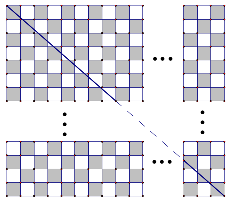
(iii) 因 $\overline{JK} = 1$，可知 $\overline{GJ} = \dfrac{99}{101}$，故 $\overline{HJ} = \dfrac{99}{101} - \dfrac{4}{101} = \dfrac{95}{101}$，即 $\overline{IK} = \dfrac{95}{99}\overline{GK}$；(給 5 分)

重複以上步驟，可知在上半部的對角線落在黑色小方格內之線段長度以等差數列的方式遞減至 0，因此整條對角線落在黑色小方格內的線段長度之總和為

$$2 \times \left(\frac{m}{101} + \frac{m}{101} \times \frac{97}{99} + \frac{m}{101} \times \frac{95}{99} + \frac{m}{101} \times \frac{93}{99} + \cdots + \frac{m}{101} \times \frac{1}{99} \right)$$
$$= \frac{2m}{9999} \times (99 + 97 + 95 + 93 + \cdots + 1) = \frac{5000m}{9999}$$

(給 5 分)。因此對角線落在白色小方格內的線段長度之總和為 $m - \dfrac{5000m}{9999} = \dfrac{4999m}{9999}$，故比值為 $\dfrac{5000}{4999}$。(給 5 分，只給正確答案共給 5 分)

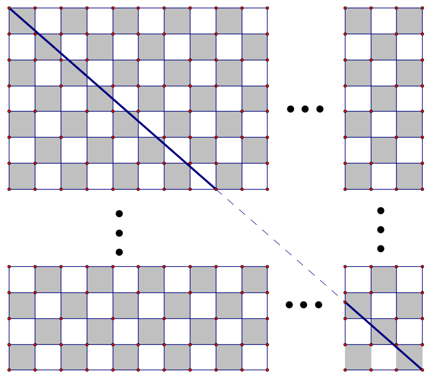
【參考解法 2】



因計算對角線白色和與黑色線段長度之和的比值等價於這些白黑線段投影到一個邊上來計算;
在 101×99 矩形方格板中,對角線和 100 條水平網格線有 100 個交點,它們的橫坐標依次為:

$$0,\frac{101}{99},\frac{202}{99},\frac{303}{99},\ldots,\frac{9900}{99},\frac{9999}{99}$$ (給 4 分)

利用 100 個交點在橫軸上的投影計算各黑色小線段的投影長度依次為:



$$1-0=\frac{99}{99},2-\frac{101}{99}=\frac{97}{99},3-\frac{202}{99}=\frac{95}{99},\ldots,\frac{97}{99},\frac{99}{99}$$

(給 4 分)

算出黑色線段投影長度之和

$$L_B=\frac{5000}{99}$$, (給 4 分)

因此,白色線段投影長度之和

$$L_w=101-L_B=\frac{4999}{99}$$ (給 4 分)

故所求黑色線段長度之總和與白色線段長度之總和的比值為 $\frac{5000}{4999}$ (給 4 分)