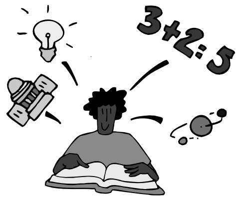
2009 小學數學競賽選拔賽複賽試題

第 一 試：應 用 題（考試時間 90 分鐘）

◎ **請將答案填入答案卷對應題號的空格內，只須填寫答案，不須計算過程。本題目卷正反面空白處可為作演算草稿紙。每題 10 分，共 120 分**

1. 有十個連續的正奇整數依序排列，最小的三個數的總和為 39，請問最大的三個數的總和是多少？



〈解法一〉

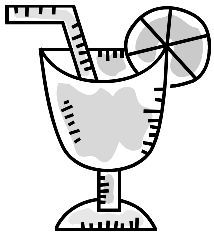
因為最小的三個數的總和為 39，故第二小的數為 13，即十個連續奇數依序為 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29，因此所求最大的三個數之和為 25+27+29=81。

〈解法二〉

令最小的數為 a，則十個連續奇數依序為 a、a+2、a+4、a+6、a+8、a+10、a+12、a+14、a+16、a+18，最小的三個數之和為 3a+6 而最大的三個數之和為 3a+48=(3a+6)+42，因此所求為 39+42=81。

ANS：81

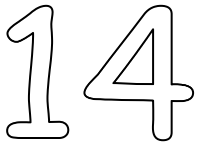
2. 天然的果汁含有 80%的水份，將其中水份的 75%抽離而製成濃縮果汁。請問濃縮果汁含有百分之幾的水份？



令天然果汁原來的量為 100 單位，可知天然果汁除水份外其餘物質有 20 單位，且被抽走了 80x75%＝60 單位的水份，因此剩下的水份為 20 單位，所以此時水份佔 $\frac{20}{20+20}=50\%$ 。

ANS：50%

3. 當 2009 被正整數 N 除時，其餘數是 14。請問 N 的所有可能值有多少個？



可知 2009－14＝1995 是 N 的倍數且 N 大於 14。因 $1995=3\times5\times7\times19$，故 1995 的因數有 $2\times2\times2\times2=16$ 個。但在 1995 的因數中，1、3、5、7 這 4 個都小於 14，故 N 的可能值有 $16-4=12$ 個。

ANS：12 個

4. 一輛自行車的前齒輪有 50 齒，而後齒輪有 24 齒。請問前齒輪最少要轉多少圈後才能使前、後齒輪都同時轉回最開始的位置？

因 50 與 24 的最小公倍數為 600，故前輪需轉 600÷50=12 圈。

ANS：12 圈

5. 如果一個三位數從左到右的數碼是按嚴格遞增的次序出現，則稱為上升數。例如 128、245、389 都是上升數，而 255、558、798 則不是。請問在三位數中共有多少個上升數？

可知百位數為 1 的上升數有 7+6+5+4+3+2+1＝28 個、百位數為 2 的上升數有 6+5+4+3+2+1＝21 個、百位數為 3 的上升數

有 5+4+3+2+1＝15 個、百位數為 4 的上升數有 4+3+2+1＝10 個、百位數為 5 的上升數有 3+2+1＝6 個、百位數為 6 的上升數有 2+1＝3 個、百位數為 7 的上升數有 1 個，因此共有 28+21+15+10+6+3+1＝84 個。

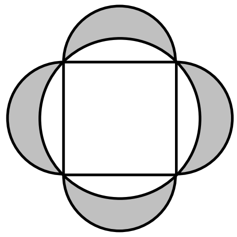
ANS：84 個

6. 用 dd/mm/yyyy(日/月/年)的形式書寫日期時，像 10/02/2001 和 20/02/2002 這樣的兩個日期稱為迴文日。請問在 2009 年之後距今最近的「迴文日」是西元哪年哪月哪日？

由迴文日規則可知可能有迴文日的年份之個位數必為 0、1、2，因此距今最近可能有迴文日的年份為 2010，而該年之迴文日為 01/02/2010，即西元 2010 年 2 月 1 日。

ANS：西元 2010 年 2 月 1 日

7. 一個正方形內接於直徑為 10cm 的圓內，在正方形的邊上分別向外畫半圓，如圖所示。請問圖中陰影部分的四個半月形面積之和為多少 cm^2？



〈解法一〉

可知陰影部分的四個半月形面積之和為即為四個以正方形邊長為直徑的半圓減去四個弓形面積，而四個以正方形邊長為直徑的半圓之面積和等於正方形外接圓之面積，故陰影部分的四個半月形面積之和等於正方形之面積，即 $\frac{1}{2}\times10\times10=50\text{cm}^2$。

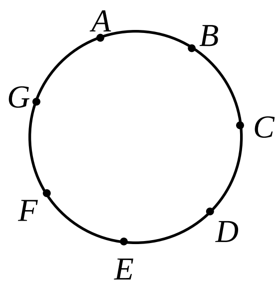
ANS：50cm^2

〈解法二〉

可知陰影部分的四個半月形面積之和為即為四個以正方形邊長為直徑的半圓與正方形的面積和減去直徑為 10cm 的圓之面積。因正方形內接於直徑為 10cm 的圓內，故正方形之對角線為 10cm，即正方形之面積為 $\frac{1}{2}\times10\times10=50\text{cm}^2$。令正方形之邊長為 a，則四個以正方形邊長為直徑的半圓之面積和為 $4\times\frac{1}{2}\times\pi\times\left(\frac{a}{2}\right)^2=\frac{1}{2}\pi a^2$。由畢氏定理可知 $2a^2=100$，故四個以正方形邊長為直徑的半圓之面積和為 $\frac{1}{2}\pi a^2=25\pi$。而直徑為 10cm 的圓之面積為 25π，故陰影部分的四個半月形面積之和為 $50+25\pi-25\pi=50\,\text{cm}^2$。

ANS：50cm^2

8. 七個點 A、B、C、D、E、F、G 將圓周分為七等分。以這些點為頂點且使得此圓之圓心落在其內部的不同位置的三角形共有多少個？

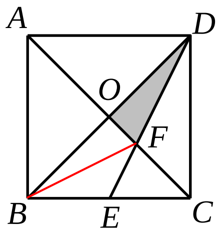


首先以 A 點來觀察，以 A 為頂點的三角形共有 $\triangle AGD$、$\triangle ABE$、$\triangle AFD$、$\triangle ACE$、$\triangle AFC$、$\triangle AED$ 合計 6 個三角形滿足題意。而其他等分點也可依同樣想法推出各有 6 個三角

形，但實際上此時每一個滿足題意之三角形都被算了三次，因此共有 $7\times6\div3=14$ 個三角形滿足題意。

ANS：14 個

9. 如圖所示，$ABCD$ 為正方形，點 E 為 BC 邊上之中點，點 F 是 AC 和 DE 之交點。若△ODF 之面積為 12cm^2，請問正方形 $ABCD$ 之面積為多少 cm^2？



連接 BF。因 AC 平分 BD，故△BOF 與△FOD 的面積相等，都是 12cm^2。因 DE 是△BDC 在 BC 邊上的中線，故△BFD 的面積與△CDF 的面積相等，都是 $12+12=24\text{cm}^2$，因△COD ＝△FOD+ △CDF，故△COD 的面積為 $12+24=36\text{cm}^2$，所以正方形 $ABCD$ 之面積為 $36\times4=144\text{cm}^2$。

ANS：144cm^2

10. 一個 4×4 的金幻方是將 1～16 的數不重複地填入 4×4 方格表的小方格內，使得每直行、每橫列及每條主對角線上的數之和，恰好是十個連續的正整數。如圖的金幻方已填入部分的數，請完成它。

			14
	9	3	7
	12	13	5
10	11	6	4

令 a、b、c、d、e 分別為下表中所在格子的數：

a	b	c	14
d	9	3	7
e	12	13	5
10	11	6	4

再令 A_1、A_2、A_3、A_4 分別為第 1 橫列至第 4 橫列的數之和，A_5、A_6、A_7、A_8 分別為由左至右第 1 直行至第 4 直行的數之和，A_9、A_{10} 分別為左上至右下與右上至左下兩條主對角線的數之和。則可知：

$A_1=14+a+b+c$； $A_2=19+d$； $A_3=30+e$； $A_4=31$；
$A_5=10+a+d+e$； $A_6=32+b$； $A_7=22+c$； $A_8=30$；
$A_9=26+a$； $A_{10}=39$。

因這是 10 個連續的數且已知有 30、39，可知這 10 個數為 30～39。因尚未填入之數為 1、2、8、15、16，可知

(i) 由 $A_2=19+d$ 與 $A_7=22+c$ 知 15、16 必需填入 c 或 d；
(ii) 由(i)知 a 可能為 1、2 或 8。但因 A_9 必須介於 30～39 之間，故 a=8、$A_9=34$；
(iii) 因 $A_3=30+e$ 且 $A_4=31$，故 e=2、$A_3=32$；
(iv) 由(ii)與(iii)知 b=1 且 $A_6=33$、$A_1=23+c$；
(v) 因 $A_{10}=39$ 與 $A_1=23+c$，故 c=15，也因此得知 d=16。

完成圖為：

8	1	15	14
16	9	3	7
2	12	13	5
10	11	6	4

11. 有一座兩臂天平與 1、3、9、27、81、243、729、2187 公克的砝碼，秤重時法碼可以任意放在天平秤盤的兩側。現要稱一個 2009 公克的物品，當天平平衡時，請問與物品在同一秤盤上的砝碼總重是多少克？

利用三進位。因

2009

$=2\times3^6+2\times3^5+0\times3^4+2\times3^3+1\times3^2+0\times3^1+2\times3^0$

$=(3\times3^6-1\times3^6)+(3\times3^5-1\times3^5)+0\times3^4+(3\times3^3-1\times3^3)+1\times3^2+0\times3^1+(3\times3^0-1\times3^0)$

$=1\times3^7-1\times3^6+3^6-1\times3^5+1\times3^4-1\times3^3+1\times3^2+1\times3^1-1\times3^0$

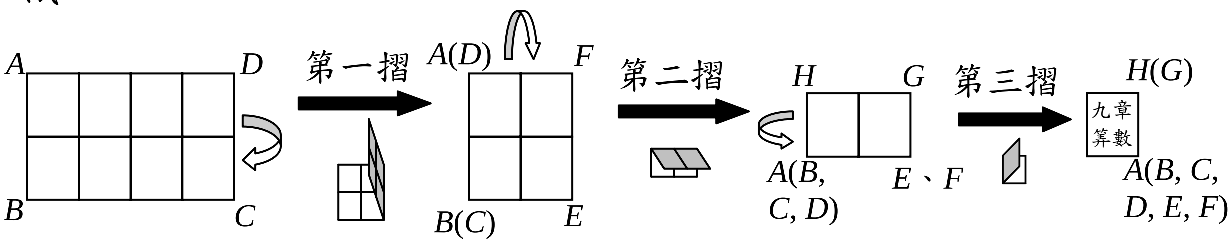
$=1\times3^7+0\times3^6-1\times3^5+1\times3^4-1\times3^3+1\times3^2+1\times3^1-1\times3^0$

即 $2009+243+27+1=2187+81+9+3$，

故與物品在同一秤盤上的砝碼為 243 公克、27 公克與 1 公克，總重為 271 公克。

ANS：271 公克

12. 一本 16 開的書是這樣印製的：先將一大張紙雙面都印妥後，依下列方式摺紙：



使得經第三摺後，第三摺痕在左側，由上而下兩面編頁為 $16n+1$、$16n+2$、…、$16n+16$，其中 n 為非負整數。現有一大張這樣的紙張，其中有一頁是第 99 頁。請問當將該頁文字正放時，它左邊相鄰的那一頁上的頁碼是什麼？

令下圖為各頁之頁碼排序情形，其中大寫字母代表在正面、小寫字母在反面：

Aa	*Bb*	*Cc*	*Dd*
Ee	*Ff*	*Gg*	*Hh*

第一摺後，由上而下依序為：

dDAa	*cCBb*
hHEe	*gGFf*

第二摺後，由上而下依序為：

aADd hHEe	*bBCc gGFf*

第三摺後，由上而下依序為：

eEHh dDAa bBCc gGFf

因 $99=16\times6+3$，故第 99 頁落在 H 的位置，其左邊相鄰的頁碼為 G，此時 G 為第 $16\times6+14=110$ 頁。

ANS：110

2009 小學數學競賽選拔賽複賽試題

第　二　試: 綜合能力測驗（考試時間 60 分鐘）

______縣市______國民小學__年級　編號：______姓名：__________性別：__

請將答案填入考卷中對應題號的空位內，第 1、3、4 題必須詳細寫下想法或理由，每題 25 分，共 100 分。

1. 數 2000＝2×2×2×2×5×5×5 是由七個質因子相乘而得。請問小於 2000 且是由 7 個質因子相乘而得的數中最大的數是什麼？

因 $3^7=2187>2009$，可知所以小於 2000 且是由 7 個質因子相乘而的數必有至少有一個質因子是 2，故此時相當於找小於 1000 且是由 6 個質因子相乘而的數。所求可看成將 2×2×2×5×5×5 中的選出幾個 2 與 5 的乘積置換成較小的相同個數之質數乘積：

1 個：只能取出 1 個 5 換成 1 個 3，其值為 2×2×2×3×5×5＝600；

2 個：因需找出最大數，故取 5×5＝25，因 24 無法寫成 2 個質因子之乘積、23 為質數，故最大可置換成 22＝2×11，其值為 2×2×2×2×11×5＝880；

3 個：因需找出最大數，故取 5×5×5＝125，最大可置換成 2×2×31＝124，其值為 2×2×2×2×2×31＝992；

4 個：因需找出最大數，故取 2×5×5×5＝250，但因 249＝3×83 不為 4 個質數之乘積、248=2×2×2×31，故最大可置換成 2×2×2×31＝248，其值仍為 2×2×2×2×2×31＝992；

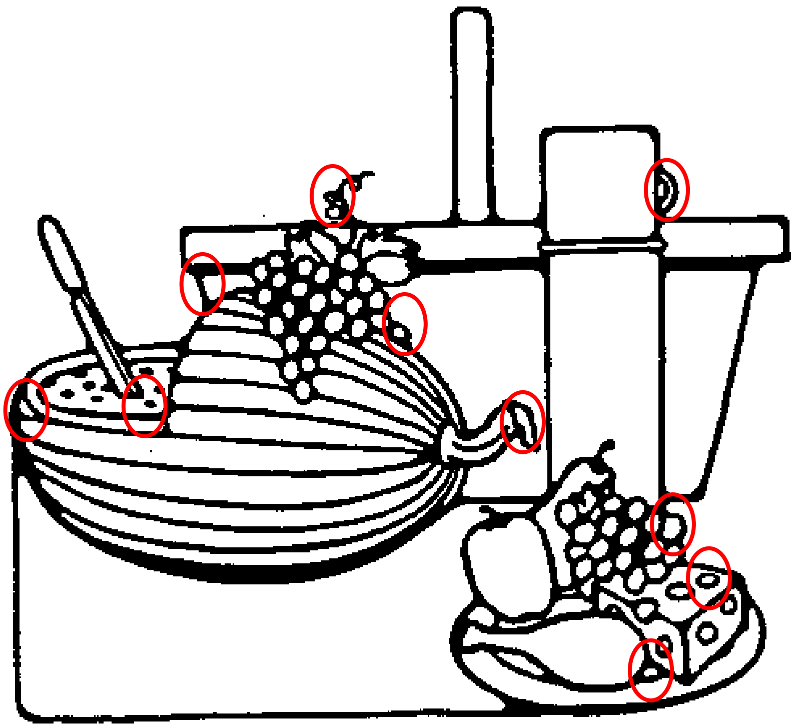
5 個：因需找出最大數，故取 2×2×5×5×5＝500，但因 499 為質數、498＝2×3×83、497＝7×71 皆不為 5 個質數之乘積、496=2×2×2×2×31，故最大可置換成 2×2×2×2×31＝496，其值仍為 2×2×2×2×2×31＝992；

6 個：此時必不是偶數，而最小的二個數為 3×3×3×3×3×3＝729、3×3×3×3×3×5＝1215，因此在 1215 與 729 之間沒有奇數為 6 個質因子相乘而的數。

因此所求為 992×2＝1984。

ANS：1984

2. 下圖與後頁的圖共有 10 處不同的地方，請在本頁的圖中用粗筆圈出，每正確找到一處得 2 分，全對得 25 分。



3. 將分數$\dfrac{n}{120}$約分為最簡分數，其中 n 為小於 120 的正整數。請問共有多少個不同值的最簡分數使得它的分母只有一位數？

$120=2\times60=3\times40=4\times30=5\times24=6\times20=8\times15$，故滿足題意的 n 必為 60、40、30、24、20、15 的倍數。而小於 120 的數中，60、40、30、24、20 或 15 的倍數為 15、20、24、30、40、45、48、60、72、75、80、90、96、100、105，合計共有 15 個。這 15 個最簡分數為$\dfrac{60}{120}=\dfrac{1}{2}$、$\dfrac{40}{120}=\dfrac{1}{3}$、$\dfrac{80}{120}=\dfrac{2}{3}$、$\dfrac{30}{120}=\dfrac{1}{4}$、$\dfrac{90}{120}=\dfrac{3}{4}$、$\dfrac{24}{120}=\dfrac{1}{5}$、$\dfrac{48}{120}=\dfrac{2}{5}$、$\dfrac{72}{120}=\dfrac{3}{5}$、$\dfrac{96}{120}=\dfrac{4}{5}$、$\dfrac{20}{120}=\dfrac{1}{6}$、$\dfrac{100}{120}=\dfrac{5}{6}$、$\dfrac{15}{120}=\dfrac{1}{8}$、$\dfrac{45}{120}=\dfrac{3}{8}$、$\dfrac{75}{120}=\dfrac{5}{8}$、$\dfrac{105}{120}=\dfrac{7}{8}$。

ANS：15 個

4. 已知 AB 為圓 O 的直徑、P 為圓外一點，如圖所示。證明 $PA+PB>2PO$。

延長 PO 使得 $PO=P_1O$，連接 P_1B、P_1A。則可知 PAP_1B 為平行四邊形且 $PP_1=2PO$、$BP_1=PA$。再觀察△PP_1B 後可知 $PB+BP_1>PP_1$，即 $PA+PB>2PO$。