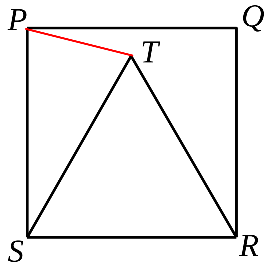
2009 小學數學競賽選拔賽決賽(一)試題

第 一 試 應 用 題 (考試時間 90 分鐘)

◎ 請將答案填入答案卷對應題號的空格內，只須填寫答案，不須計算過程。本題目卷正反面空白處可為作演算草稿紙。每題 10 **分，共** 120 **分**

1. 右圖中，正方形 $PQRS$ 及正三角形 STR 在同一平面上。請問 $\angle PTS$ 為幾度？



連接 PT。因 $ST=SR=PS$，所以△PTS 是等腰三角形。因此 $\angle PTS=\dfrac{1}{2}(180°-\angle PST)=\dfrac{1}{2}(180°-(90°-60°))=75°$

ANS：75°

2. 在上午 9：00 時，時鐘上長針與短針所夾之劣角為 90°。請問經過 10 分鐘後，兩針所夾之劣角為幾度？(註：劣角為小於 180°的角)

可知長針每分鐘走 360°÷60＝6°、短針每分鐘走(360°÷12)÷60＝0.5°，即長針每分鐘比短針多走 5.5°，因此 10 分鐘後長針比短針多走 55°，即兩針所夾之劣角為 90°＋55°＝145°。

ANS：145°

3. 請問 $1+11+111+\cdots+\underbrace{11\cdots11}_{2009\text{位數}}$ 之和的末五位數是什麼？

$1+11+111+\cdots+\underbrace{11\cdots11}_{2009\text{位數}}$

$=1\times2009+10\times2008+100\times2007+1000\times2006+10000\times2005+\cdots+10^{2008}\times1$

$=2009+20080+200700+2006000+20050000+200400000+\cdots+10^{2008}$

$=22278789+200400000+\cdots+10^{2008}$

因從 200400000 後每項的末五位數都是 0，因此和的末五位數為 78789。

ANS：78789

4. 用 60 個 1×1×1 的小立方體積木來拼成一個長方體。請問最多能拼成幾種不同的長方體？(註：長方體經旋轉或翻轉能使得長寬高都相同者視為相同。)

60 個 1×1×1 的小立方體積木之體積為 60。因 60 分解為 3 個正整數之乘積的情形共有 1×1×60、1×2×30、1×3×20、1×4×15、1×5×12、1×6×10、2×2×15、2×3×10、2×5×6、3×4×5 等 10 種情形，故可拼成 10 種不同的長方體。

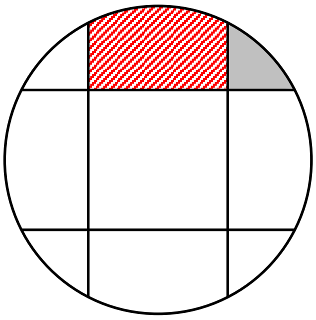
ANS：10 種

5. 有一運輸隊要搬運食物及裝備補給前線的戰士。載運這些物品需要 400 輛汽車，但是必須增用一些汽車來載運汽車所需的油料及駕駛的食物。已知一輛車可載運 10 輛汽車所需的油料及駕駛的食物，請問這個運輸隊至少共需要多少輛汽車？

可知需 400 輛汽車搬運食物及裝備補給前線的戰士，而這 400 輛汽車還需要增派 400÷10＝40 輛汽車來載運它們所需的油料，而增派的 40 輛汽車還需要再增派 40÷10＝4 輛汽車來載運它們所需的油料，最後仍需要 1 輛汽車載運這 4 輛汽車及自己所需的油料，因此至少共需要 400+40+4+1＝445 輛汽車。

ANS：445 輛

6. 如圖，圓中有四條弦，每一條弦都把圓分割成面積比為 1：3 的兩個部分，而這些弦在圓正中正好圍出一個正方形。已知這個正方形的面積為$100 cm^2$，請問圖中陰影部分的面積為多少 cm^2？



因每一條弦都把圓分割成面積比為 1：3 的兩個部分，可知圓面積可看成 4 倍紅色斜線區域面積、4 倍灰色陰影部分區域面積與正方形區域的面積和，且兩條橫弦之間的 3 塊區域之面積與兩條橫弦上方與下方的 6 塊區域之面積和相等。因此得知正方形面積為 4 倍陰影部分區域面積，即陰影部分的面積為 $100 \div 4 = 25 cm^2$。

ANS：25 cm^2

7. 將正整數 1、2、3、…、2009 寫在黑板上，請問至少要擦掉幾個數才能使得留在黑板上全部的數之乘積的個位數是 2？

因為 5 的倍數之個位數必為 0 或 5，故必須將黑板上 5 的倍數全部擦掉；因 $2009=5\times401+4$，此時已擦掉 401 個數，且這時候黑板上所有數的乘積之末位數必是 $1\times2\times3\times4\times6\times7\times8\times9$ 之個位數的若干次方；可再繼續觀察出 $1\times2\times3\times4\times6\times7\times8\times9$ 之積的個位數為 6，故此時黑板上的數之個位數為 6 的若干次方之個位數，即此時黑板上的數之乘積的個位數為 6，故此時再擦去 3 即可使黑板上的數之乘積的個位數為 2，故至少需擦去 402 個數。

ANS：402 個

8. 對於數碼均不相同且均不為 0 的四位數，計算此數本身與其數碼的乘積之差。請問這樣的差數之最大值是多少？

四位數 $\overline{abcd}$ 與其數碼的乘積之差為：

$$1000a+100b+10c+d-abcd=a(1000-bcd)+100b+10c+d$$

(1) 因 $b<10$、$c<10$、$d<10$，故 $bcd<1000$. 所以 $a(1000-bcd)+100b+10c+d$ 是正整數且當 a 增加時該值也會隨之增加。因找最大值，故取 $a=9$ 且該值為 $9000-9bcd+100b+10c+d$，即此時必須尋找 $100b+10c+d-9bcd=100b+10c+d(1-9bc)$ 的最大值。

(2) 因 $1-9bc<0$，$100b+10c+d(1-9bc)$ 的最大值發生在 $d=1$ 時，此時該值為 $100b+10c+(1-9bc)=1+100b+10c-9bc$，即此時必須尋找 $100b+10c-9bc$ 的最大值。

(3) 因 $100b+10c-9bc=10c+b(100-9c)$ 且 $c<10$，知 $9c<100$，所以 $10c+b(100-9c)$ 是正整數且當 b 增加時該值也會隨之增加。因找最大值，因 $a=9$ 故取 $b=8$ 且該值為 $800-62c$，因 $d=1$ 即知 c 需取 2

故所求值發生在 9821 且其值為 $9821-9\times8\times2\times1=9677$。

ANS：9677

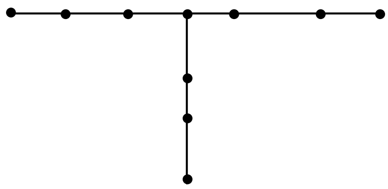
9. 有一個矩形被分割為四個邊長為正整數的小矩形，其中有二個小矩形之面積為 12 與 18，如圖所示。請問此大矩形可能有幾種不同的面積？

12	A
B	18

如圖所示，令其餘兩個小矩形的面積分別為 A、B。則利用矩形面積 $12:A=B:18$，可知 $A\times B=12\times 18=216$，因 216 可分解為兩個正整數之乘積的情形共有 1×216、2×108、3×72、4×54、6×36、8×27、9×24、12×18 等八種情形，故 A 矩形的面積與 B 矩形的面積之和可為：217、110、75、58、42、35、33、30，因此原始矩形的面積共有 $30+217=247$、$30+110=140$、$30+75=105$、$30+58=88$、$30+42=72$、$30+35=65$、$30+33=63$、$30+30=60$ 共 8 種不同的值。

ANS：8 種

10. 以右圖的黑點作為頂點，請問可作出多少個三角形？



〈解法一〉

以右圖的黑點作為頂點的三角形可分為以下二類：

(i) 有兩個頂點在水平線上：水平線上取 2 個點共有 21 種情形，鉛垂線上取 1 個點共有 3 種情形，因此共有 $21\times 3=63$ 個；

(ii) 有兩個頂點在鉛垂線上：鉛垂線上取 2 個點共有 6 種情形，水平線上取 1 個點共有 6 種情形，因此共有 $6\times 6=36$ 個；

而這兩種三角形同時包含了其中一頂點為水平線與鉛垂線的交點之情況，即這情況的三角形重複計算了一次，必須扣除。因其中一頂點為水平線與鉛垂線的交點之三角形共有 $(7-1)\times(4-1)=18$ 個，所以共有 $63+36-18=81$ 個三角形。

〈解法二〉

以右圖的黑點作為頂點的三角形可分為以下三類：

(i) 三角形的頂點不包含水平線與鉛垂線的交點且有兩個頂點在水平線上：水平線上取 2 個點共有 15 種情形，鉛垂線上取 1 個點共有 3 種情形，因此共有 $15\times 3=45$ 個；

(ii) 三角形的頂點不包含水平線與鉛垂線的交點且有兩個頂點在鉛垂線上：鉛垂線上取 2 個點共有 3 種情形，水平線上取 1 個點共有 6 種情形，因此共有 $3\times 6=18$ 個；

(iii) 一頂點為水平線與鉛垂線的交點：此時在鉛垂線上與水平線上都必各有一頂點，因此共有 $6\times 3=18$ 個；

所以共有 $45+18+18=81$ 個三角形。

ANS：81 個

11. 將分數 $\dfrac{n}{120}$ 約分為最簡分數，其中 n 為小於 120 的正整數。請問共有多少個不同的最簡分數，它的分子只有一位數？

$120=2\times 60=3\times 40=4\times 30=5\times 24=6\times 20=8\times 15=10\times 12$，故：

最簡分數之分子為 1 時：分母有 2、3、4、5、6、8、10、12、15、20、24、30、40、60、120 等共 15 種可能，即有 15 個不同的最簡分數；

最簡分數之分子為 2 時：分母有 3、5、15 等共 3 種可能，即有 3 個不同的最簡分數；
最簡分數之分子為 3 時：分母有 4、5、8、10、20、40 等共 6 種可能，即有 6 個不同的最簡分數；
最簡分數之分子為 4 時：分母有 5、15 等共 2 種可能，即有 2 個最簡分數；
最簡分數之分子為 5 時：分母有 6、8、12、24 等共 4 種可能，即有 4 個不同的最簡分數；
最簡分數之分子為 6 時：不可能發生；
最簡分數之分子為 7 時：分母有 8、10、12、15、20、24、30、40、60、120 等共 10 種可能，即有 10 個不同的最簡分數；
最簡分數之分子為 8 時：分母只有 15 這 1 種可能，即有 1 個最簡分數；
最簡分數之分子為 9 時：分母有 10、20、40 等共 3 種可能，即有 3 個不同的最簡分數；
因此共有 15+3+6+2+4+10+1+3＝44 個不同的最簡分數。

ANS：44 個

12. 請問有多少個正整數的值恰好等於它的數碼和的 13 倍？

若兩位數 $\overline{ab}$ 滿足題意，則有 $10a+b=13(a+b)$，即 $3a+12b=0$，此式無正整數解，所以不可能有這樣的兩位數；

若三位數 $\overline{abc}$ 滿足題意，則有 $100a+10b+c=13(a+b+c)$，即 $87a=3b+12c$：

(i) 當 a=1 時，知 $3b+12c=87$，即 $b+4c=29$，故知

(1) 當 b=1 時則 c=7，因此可知 117 為一解；
(2) 當 b=5 時則 c=6，因此可知 156 為一解；
(3) 當 b=9 時則 c=5，因此可知 195 為一解。

(ii) 當 $a\geq 2$ 時，知 $3b+12c\leq 3\times 9+12\times 9=135<174=87\times 2\leq 2a$，因此無滿足題意的解；

所以三位數僅 117, 156, 195 滿足題意；

若四位數 $\overline{abcd}$ 滿足題意，則有 $1000a+100b+10c+d=13(a+b+c+d)$，即 $987a+87b=3c+12d$，顯然 a=0，因此沒有這樣的四位數；同樣的想法，可知對於更高位的數皆可推出首位數必為 0，因此沒有這樣更高位的數。
因此僅三個數滿足題意。

ANS：3 個

2009 小學數學競賽選拔賽決賽(一)試題

第　二　試: 綜合能力測驗 (考試時間 60 分鐘)

1. 數 2000＝2×2×2×2×5×5×5 是由七個質因子相乘而得。請問大於 2000 且是由 7 個質因子相乘而的數中最小的數是什麼？

因 $3^7=2187>2000$，可知比 2187 小且是由七個質因子相乘而的數必有至少有一個質因子是 2，故此時可改找大於 1000 且是由六個質因子相乘而的數中最小的數。又因 $3^6=729$、$5^6=15625$，故此時所求之數必有質因數 2 或 3。

(i) 若沒有質因數 2，則最小值為 $3^5\times5=1215$ 且所求之數為 2430；

(ii) 若至少有一個 2，則此時可改找大於 500 且是由五個質因子相乘最小的數。又因 $3^5=243$、$5^5=3125$，故此時所求之數必有質因數 2 或 3。

(a) 若沒有質因數 2，則最小值為 $3^4\times7=567$ 且所求之數為 2268；

(b) 若至少有一個質因數 2，則此時可改找大於 250 且是由四個質因子相乘而的數中最小的數。又因 $3^4=81$、$5^4=625$，故此時所求之數必有質因數 2 或 3。

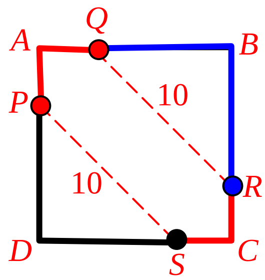
(1) 若沒有質因數 2，則最小值為 $3^3\times11=297$ 且所求之數為 2376；

(2) 若至少有一個質因數 2，則此時可改找大於 125 且是由三個質因子相乘而的數中最小的數。因 $126=2\times3\times3\times7$、127 是質數、$128=2^7$、$129=3\times43$、$130=2\times5\times13$，故此時所求之數為 $2\times2\times2\times2\times130=2080$。

故大於 2000 且是由七個質因子相乘而的數中最小的數是 2080。

2. 請在 10 cm×10 cm 的正方形四個邊上的每一個點都塗上紅、藍、黑三種顏色中的一種，使得任二個距離恰為 10 cm 的點上所塗上的顏色都互不相同。(每個交界點或每條線段必須正確標明顏色才能算全對)

如右圖，令這個正方形為 *ABCD*。分別在 *AD*、*CD* 上取 *P*、*S* 使得△*PDS* 是等腰直角三角形且其斜邊 *PS* 長度為 10，再分別在 *AB*、*BC* 上取 *Q*、*R* 使得△*QBR* 是等腰直角三角形且其斜邊 *QR* 長度為 10。則可用以下塗法：



(i) 將 *BQ*、*BR*（包含 *R* 點但不包含 *Q* 點）塗藍色。

(ii) 將 *PD*、*DS*（包含 *S* 點但不包含 *P* 點）塗黑色。

(iii) 將 *AP*、*AQ*（包含 *P* 與 *Q* 點）與 *CS*、*CR*（不包含 *S* 與 *R* 點）塗紅色。

這是因為利用此塗法，可知：

(a) 若兩點皆為藍色時，必在△*QBR* 的 *BQ*、*BR* 邊上，但因在△*QBR* 內距離為 10 cm 的兩點恰為 *Q*、*R* 兩點，故兩點皆為藍色時其距離必小於 10 cm。

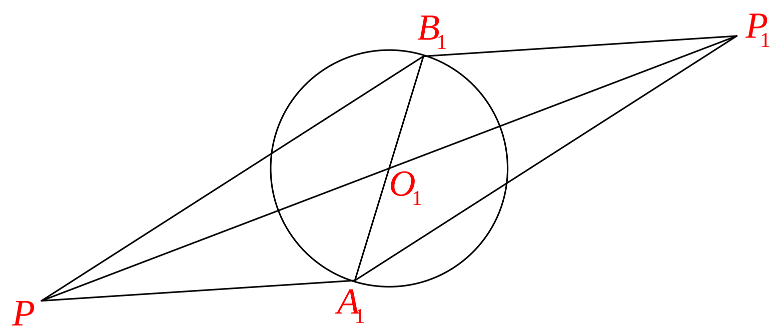
(b) 若兩點皆為黑色時，必在△*PDS* 的 *PD*、*DS* 邊上，但因在△*PDS* 內距離為 10 cm 的兩點恰為 *P*、*S* 兩點，故兩點皆為黑色時其距離必小於 10 cm。

(c) 若兩點皆為紅色時，必在六邊形 *PSCRQA* 的 *AP*、*AQ*、*CS*、*CR* 邊上。若兩點是同時在 *AP*、*AQ* 上或 *CS*、*CR* 上，則其距離必小於 10 cm；若是一點在 *AP* 或 *AQ* 上且另一點 *CS* 或 *CR* 上，則其距離必大於 10 cm。故兩點皆為紅色時其距離必不為 10 cm。

3. 阿珍有三只價值連城的鑽石手錶，她把它們隨意地放置在豪宅臥房四周的衣櫃內。已知這些手錶都準時運行，無論這些手錶放置的方位為何，對於房間中任意一點，請問是否一定存在有某個時刻使得此點到三只手錶中心的距離總和小於此點到三只手錶分針針尖的距離總和？請證明您的結論。

假設有一時刻使得房間中任意一點到三只手錶中心的距離和大於等於此點到三只手錶分針針尖的距離和，因為這些手錶都準時運行，30 分鐘後這三只手錶分針針尖同時指向相反的方向，此點到三只手錶中心的距離和一定小於此點到三只手錶分針針尖的距離和。

下圖中，令 P 為房間中任意一點、O_1 為第一隻錶的中心、A_1 為此時第一隻錶的分針針尖，取 B_1 為 30 分鐘後第一隻錶的分針針尖、延長 PO_1 使得 $PO_1=P_1O_1$，連接 P_1B_1 、P_1A_1。則可知 $PA_1P_1B_1$ 為平行四邊形且 $PP_1=2PO_1$。再觀察 $\triangle PP_1B_1$ 後可知 $PB_1+B_1P_1>PP_1$，即 $PB_1+PA_1>2PO_1$。

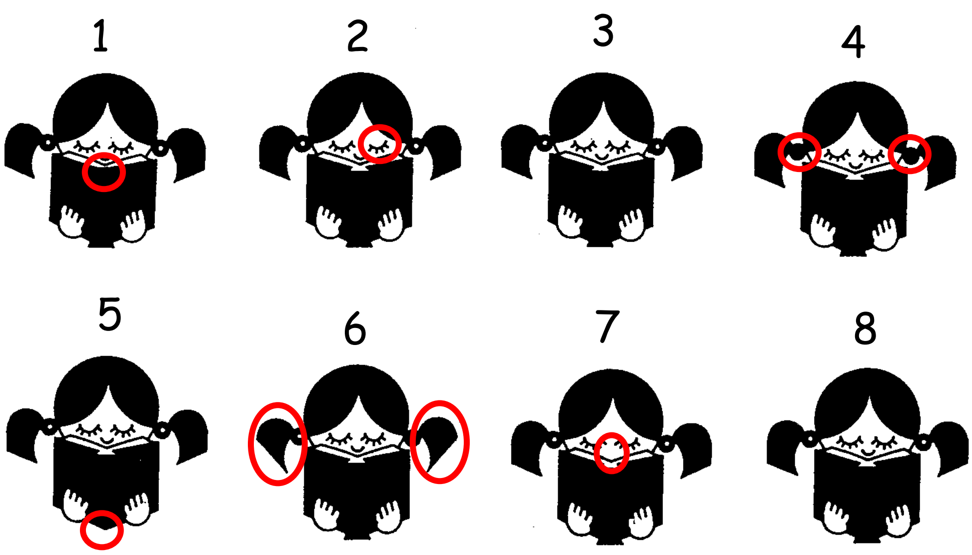


同理，若取 O_2、O_3 分別為第二、三隻錶的中心，A_2、A_3 為此時第二、三隻錶的分針針尖，B_2、B_3 為 30 分鐘後第二、三隻錶的分針針尖，一樣可得知

$$PB_2+PA_2>2PO_2\ ;\ PB_3+PA_3>2PO_3$$

因此有 $PB_1+PA_1+PB_2+PA_2+PB_3+PA_3>2PO_1+2PO_2+2PO_3$。 因已知 $PA_1+PA_2+PA_3\le PO_1+PO_2+PO_3$，故 $PB_1+PB_2+PB_3>PO_1+PO_2+PO_3$

4. 請從以下 8 張圖中圈選出完全相同的兩張圖的編號。(細小的黑點不同可能是試題印刷上的瑕疵。)



ANS：3 號與 8 號