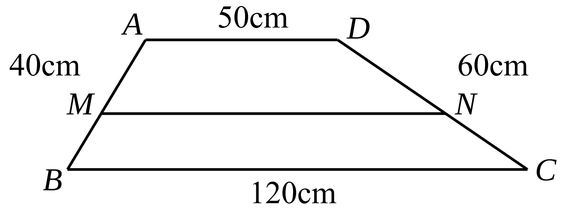
2009 小學數學競賽選拔賽決賽(二)試題

第 一 試 應 用 題 (考試時間 90 分鐘)

◎ 請將答案填入答案卷對應題號的空格內，只須填寫答案，不須計算過程。本題目卷正反面空白處可為作演算草稿紙。每題 10 分，共 120 分

1. 如下圖梯形的上、下底分別為 50 cm、120 cm，兩腰分別為 40 cm 和 60 cm。在其間畫一條與上下底平行之線段 MN，使得分割出之二個梯形的周長相等。請問 $BM+CN$ 之長度為多少 cm？



因 BC 比 AD 多 120－50=70 cm，所以 $AM+DN$ 要比 $BM+CN$ 多 70 cm。因 $AM+DN+BM+CN$=40+60=100 cm，所以 $AM+DN$=85 cm、$BM+CN$=15 cm。

ANS：15 cm

2. 某公司每天上班時間由上午 8：30 至下午 5：30。請問在這段間內時鐘的時針和分針會夾成直角幾次？

可知因從上午 8：00 至下午 6：00 間有經過上午 9：00 及下午 3：00，故上午 8：00 至下午 6：00 間時鐘的時針和分針會夾成直角共 10×2－2＝18 次；因 8：00 至 8：30 間有一次夾成直角、5：30 至 6：00 間也有一次夾成直角，因此上午 8：30 至下午 5：30 間時針和分針會夾成直角共 18－2＝16 次。

ANS：16 次

3. N 是一個小於 3000 的四位數，將它除以 11 所得的餘數為 5、除以 13 所得的餘數為 6、除以 17 所得的餘數為 8。請問 N 之值是什麼？

〈解法一〉

可知 $N=11a+5=13b+6=17c+8$。故知 $11a=13b+1$，滿足這樣的數中，最小正整數是 66，故滿足除以 11 所得的餘數為 5、除以 13 所得的餘數為 6 之數必為 $11\times13K+(66+5)=143K+71$ 的形式，即 $N=143K+71=17c+8$，故知 $17c=143K+63$，滿足這樣的數中，最小正整數是 1207，故滿足 $143K+71=17c+8$ 之數必為 $143\times17M+1207+8=2431M+1215$。因 N 是一個小於 3000 的四位數，所以 N 是 1215。

〈解法二〉

可知 $2N+1$ 可被 11, 13, 17 同時整除，即 $2N+1$ 等於 2431, 4862, 7293, …. 。只有 $2N+1$ 等於 2431 才符合題意，即 N=1215。

ANS：1215

4. 有一個三位數，它是二個相異的完全平方數之和。請問這個三位數的最大值是什麼？

(i) 因完全平方數被 4 除後所得的餘數為 0 或 1，故二個完全平方數之和被 4 除後所得的餘數為 0、1 或 2，因此 999 不可能；

(ii) 若 998 滿足題意，因完全平方數的個位數為 0、1、4、5、6 或 9，因此二個完全平方數的個位數必都是 4 或是 9：

(a) 若此二個完全平方數的個位數是 4，則這二個數都必是偶數，但因 998 被 4 除後所得的餘數為 2，故這二個完全平方數分別被 4 除後所得的餘數必都為 1，即這二個完全平方數都必是奇數，矛盾；

(b) 若此二個完全平方數的個位數是 9，則這二個數都必是奇數，即此二個完全平方數分別被 8 除後所得的餘數必都為 1，故此二個完全平方數之和被 8 所除之餘數必為 2；但因 998 被 8 除後所得的餘數為 6，矛盾；

(iii) 可算出 $997=31^2+6^2$，因此所求為 997。

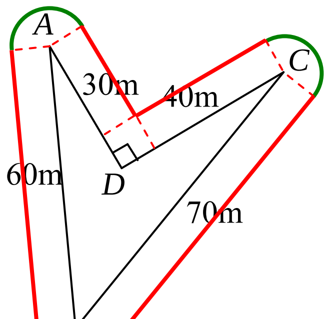
ANS：997

5. 小文有一個故障的計算器。當打開電源時，視窗上顯示數字 0；如果按下「＋」鍵則它會加上 65；如果按下「－」鍵則它會減去 91；而其它的按鍵則無效。小文打開計算器電源，任意操作上述按鍵，則他可以得到最接近 2009 的數是什麼？

用這個故障的計算器能得出的數必為 $65a+91b$，其中 a 和 b 是整數。由於 $65=13\times5$、$91=13\times7$，因此得出的數可被 13 整除。因 13 的倍數裡，不超過 2009 之最大的數是 $2002=13\times154$、超過 2009 之最小的數是 $2015=13\times155$，所以用這計算器可能得到的最接近於 2009 的數是 2015。因 $155=5\times38-7\times5$，故 $2015=5\times38\times13-7\times5\times13=65\times38-91\times5$，即按「＋」鍵 38 次、按「－」鍵 5 次。

ANS：2015

6. 有一飛鏢形建築物 $ABCD$，其各邊之長度如圖所示，$AB=60$ m、$BC=70$ m、$CD=40$ m、$AD=30$ m，並且已知 $\angle ADC=90^\circ$。在其外圍擬建一條步道，使得此步道的外緣距離建築物之最近距離都保持 5 m。請問沿著此步道之外緣繞一圈共需走多少 m？(取 $\pi=3.14$)



可知步道可分為紅色部分的直線段與綠色部分的圓弧段。

直線段之長度和為 $60+70+(30-5)+(40-5)=190$ m 而三個圓弧的角度和為

$$360^\circ\times3-90^\circ\times6-(\angle BAD+\angle BCD+\angle ABC)=1080^\circ-540^\circ-90^\circ=450^\circ$$

所以三個圓弧段的長度和為 $2\times5\times3.14\times\dfrac{450}{360}=39.25$ m

故繞一圈需走 $190+39.25=229.25$ m。

ANS：229.25 m

7. 正整數 2009 的數碼和為 11，請問在 2010 到 2999 之間有多少個自然數其數碼和為 11？

〈解法一〉

可知千位數必為 2，故考慮百位數、十位數與個位數之和為 9 的數。

(i) 當百位數為 9 時，僅 2900 滿足；

(ii) 當百位數為 8 時，2810、2801 滿足；

(iii) 當百位數為 7 時，2720、2702、2711 滿足；

(iv) 當百位數為 6 時，2630、2603、2621、2612 滿足；

(v) 當百位數為 5 時，2540、2504、2531、2513、2522 滿足；

(vi) 當百位數為 4 時，2450、2405、2441、2414、2432、2423 滿足；

(vii) 當百位數為 3 時，2360、2306、2351、2315、2342、2324、2333 滿足；

(viii) 當百位數為 2 時，2270、2207、2261、2216、2252、2225、2243、2234 滿足；

(ix) 當百位數為 1 時，2180、2108、2171、2117、2162、2126、2153、2135、2144 滿足；

(x) 當百位數為 0 時，2090、2081、2018、2072、2027、2063、2036、2054、2045 滿足；

因此共有 $1+2+3+4+5+6+7+8+9+9=54$ 個

〈解法二〉

可知千位數必為 2，故考慮百位數、十位數與個位數之和為 9 的數。

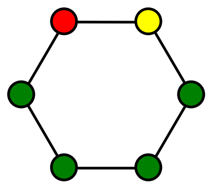
即將九個 1 分為大於等於 0 的三部份，此亦即將十二個 1 分為大於 0 的三部份，即從十二個 1 中間的 11 個間隔中取二個切開，故有 $11\times10\div2=55$ 種分法，但是 2009 要排除在外，因此共有 54 個。

ANS：54 個

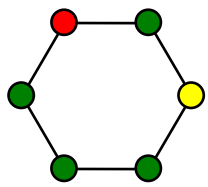
8. 在正六邊形的頂點上放一個紅球、一個黃球、四個綠球。請問共有多少個不同的構形？(即旋轉或翻轉視為相同)

因旋轉或翻轉視為相同，故可分成以下幾種情況：

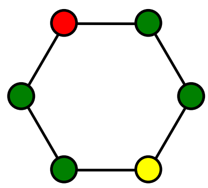
(i) 紅球與黃球間分別夾 0 個綠球：



(ii) 紅球與黃球間分別夾 1 個綠球：



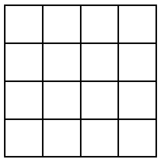
(iii) 紅球與黃球間分別夾 2 個綠球：



因此共 3 種。

ANS：3 種

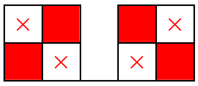
9. 在右圖的方格表中，每個格子內最多只能放入一枚棋子，使得每行每列都恰好有三枚棋子。請問共有多少種不同的放法？



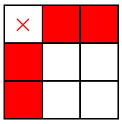
〈解法一〉

本題可看成每行每列中都恰好僅一個格子無棋子。

(1) 在 2×2 方格表中，有 2 種放法（打×部分為無棋子的格子、塗紅色部分為放有棋子的格子）：

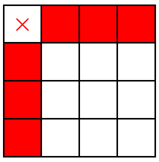


(2) 在 3×3 方格表中，若將第一行中左上角格子打×，則其餘未完成部分可看成 2×2 方格表的情況：



因第一行其他兩個位置也是一樣的狀況，故 3×3 方格表有 3×2=6 種放法。

(3) 在 4×4 方格表中，若一樣將第一行中左上角格子打×，則其餘未完成部分可看成 3×3 方格表的情況：



第一行其他三個位置也是一樣的狀況，故 4×4 方格表有 4×6=24 種放法。

〈解法二〉

本題可看成每行每列中都恰好僅一個格子無棋子。若在第一列無棋子的格子在第 a 行；第二列無棋子的格子在第 b 行；第三列無棋子的格子在第 c 行；第四列無棋子的格子在第 d 行。則(a, b, c, d)是 1, 2, 3, 4 的排列，而 1, 2, 3, 4 共有 4×3×2×1 種不同的排列方法，故棋子共有 24 種不同的放法。

ANS：24 種

10. 有三個古董鐘，它們的時針都掉了，只剩下分針，且都走的較快，這三個鐘每小時分別快了 3 分鐘、6 分鐘及 8 分鐘。若在正中午將這三個鐘的分針都調整指向 12，請問至少幾小時後這三個鐘的分針會指向相同的分鐘數字？

令每小時分別快了 3 分鐘、6 分鐘及 8 分鐘的古董鐘依序為 A、B、C。因 A 和 B 每小時差 3 分，所以會在每 60÷3=20 小時後指向同樣的分鐘數字。同樣地因 A 和 C 每小時差 5 分，故每 60÷5=12 小時後指向同樣的分鐘數字，而 B 和 C 每小時差 2 分，故每 60÷2=30 小時後指向同樣的分鐘數字。20、12、30 的最小公倍數為 60，即 60 小時後這三個鐘的分針會指向相同的分鐘數字。

ANS：60 小時

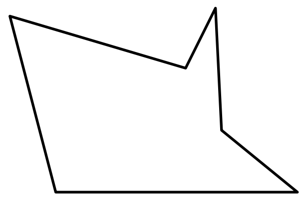
11. 西洋有個迷信，如果某月的 13 日正巧是星期五，則是不吉祥的日子，俗稱它為「黑色星期五」(BLACK FRIDAY)，例如今年的 3 月 13 日就是一個「黑色星期五」。請問一年內至多有幾個「黑色星期五」？

若該年不是潤年則 1 到 12 月每月的天數依序為 31、28、31、30、31、30、

31、31、30、31、30、31 天，因一星期有七天，所以 1 到 12 月每月的天數除以 7 後所得餘數依序為 3、0、3、2、3、2、3、3、2、3、2、3 天，因此若 1 月 13 日是星期 K（星期日視為星期 0，K 為 0~6 的正整數），則該年 1 月到 12 月的 13 日依序為星期 K、$K+3$、$K+3$、$K+6$、$K+1$、$K+4$、$K+6$、$K+2$、$K+5$、K、$K+3$、$K+5$（以上之值若超過 7，則化簡為除以 7 後之餘數），其中 $K+6$ 出現三次是最多的，故這一年黑色星期五最多有三天，發生在 $K=6$ 時；若該年是潤年則 1 到 12 月每月的天數依序為 31、29、31、30、31、30、31、31、30、31、30、31 天，因一星期有七天，所以 1 到 12 月每月的天數除以 7 後所得餘數依序為 3、1、3、2、3、2、3、3、2、3、2、3 天，因此若 1 月 13 日是星期 K（星期日視為星期 0，K 為 0~6 的正整數），則該年 1 月到 12 月的 13 日依序為星期 K、$K+3$、$K+4$、K、$K+2$、$K+5$、K、$K+3$、$K+6$、$K+1$、$K+4$、$K+6$（以上之值若超過 7，則化簡為除以 7 後之餘數），其中 K 出現三次是最多的，故這一年黑色星期五最多有三天，發生在 $K=5$ 時；因此無論是否潤年一年內最多有 3 個黑色星期五。

ANS：3 個

12. 右圖是一個六邊形，它有 3 個銳角。若一個十二邊形的任意兩個邊除了頂點處之外並不相交於內部，請問這個十二邊形最多可能有多少個銳角？

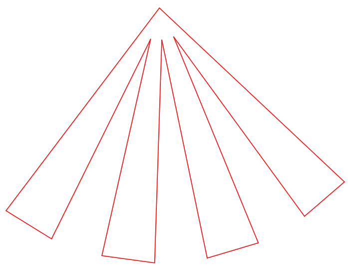


令十二邊形中有 n 個銳角，則利用內角和可得以下不等式：

$$(12-2)\times 180^\circ < n\times 90^\circ + (12-n)\times 360^\circ$$

$$3n < 28$$

因此 n 最大值為 9。而 9 個銳角的十二邊形如右圖所示，故最多有 9 個銳角。



ANS：9 個

2009 小學數學競賽選拔賽決賽(二)試題

第　二　試: 綜合能力測驗 (考試時間 60 分鐘)

______縣市______國民小學__年級　編號：______姓名：__________性別：__

請將答案填入考卷中對應題號的空位內，第 1、2、3 題必須詳細寫下想法或理由，每題 25 分，共 100 分。

1. 王員外現有相等枚數的金幣與銀幣以及一個聚寶盆。每次將金、銀幣放入聚寶盆作法後，金幣會變成 2 倍、銀幣會變成 3 倍。王員外先將身上所有的金幣與銀幣放入聚寶盆內經作法後取出金、銀幣，分一部分給大兒子（金、銀幣至少各 1 枚），再將剩下的所有金、銀幣放入聚寶盆內作法，再取出金、銀幣，分一部份給二兒子，再將剩下的所有金、銀幣放入聚寶盆內作法，所得的金、銀幣全都給三兒子。王員外分給三個兒子的金幣數量都一樣多、銀幣數量也都一樣多。請問每位兒子至少各得到多少枚金幣？多少枚銀幣？

若三個兒子最後得到 A 枚金幣，則可知在分給二兒子後且未放入聚寶盆前的金幣數量為 $\frac{A}{2}$，即在分給大兒子後且未放入聚寶盆前的金幣數量為 $\left(A+\frac{A}{2}\right)\times\frac{1}{2}=\frac{3A}{4}$，故王員外原有的的金幣數量為 $\left(A+\frac{3A}{4}\right)\times\frac{1}{2}=\frac{7A}{8}$；

若三個兒子最後得到 B 枚銀幣，則可知在分給二兒子後且未放入聚寶盆前的銀幣數量為 $\frac{B}{3}$，即在分給大兒子後且未放入聚寶盆前的銀幣數量為 $\left(B+\frac{B}{3}\right)\times\frac{1}{3}=\frac{4B}{9}$，故王員外原有的的銀幣數量為 $\left(B+\frac{4B}{9}\right)\times\frac{1}{3}=\frac{13B}{27}$。

由題意可得 $\frac{7A}{8}=\frac{13B}{27}$，即 $189A=104B$，故 A 的最小值為 104、B 的最小值為 189。

ANS：104 枚金幣、189 枚銀幣

2. 阿珍有三只價值連城的鑽石手錶，她把它們隨意地放置在豪宅臥房四周的衣櫃內。已知這三只手錶每小時分別快 1、3、5 分鐘，無論這些手錶放置的方位為何，對於房間中任意一點，請問是否一定存在有某個時刻使得此點到三只手錶中心的距離總和小於此點到三只手錶分針針尖的距離總和？

由決賽一第二試第 3 題可知若三只手錶皆準時，且在某一時刻會使得此點到三只手錶中心的距離總和大於此點到三只手錶分針針尖的距離總和，則經過 30 分鐘後此點到三只手錶中心的距離總和必小於此點到三只手錶分針針尖的距離總和。而此時因三只手錶每小時分別快 1、3、5 分鐘，故可考慮若在某一時刻會使得此點到三只手錶中心的距離總和大於此點到三只手錶分針針尖的距離總和，則是否有一時刻讓這三只手錶分針針尖同時指向相反的方

向？若有，即可得證。

令每小時分別快了 1 分鐘、3 分鐘及 5 分鐘的鑽石手錶依序為 A、B、C。則可知 B 比 A 每小時快 2 分鐘、C 比 A 每小時快 4 分鐘、C 比 B 每小時快 2 分鐘，因此每 60÷2=30 小時 B 比 A 多走 1 圈、每 60÷4=15 小時 C 比 A 多走 1 圈、每 60÷2=30 小時 C 比 A 多走 1 圈。從 A 錶的角度來看，30 小時後快了 30 分鐘，即此時分針指向相反的方向；同理，B 錶、C 錶也可是指向相反的方向。故若在某一時刻會使得此點到三只手錶中心的距離總和大於此點到三只手錶分針針尖的距離總和，則 30 小時後這三只手錶分針針尖會同時指向相反的方向。故一定存在有某個時刻使得此點到三只手錶中心的距離總和小於此點到三只手錶分針針尖的距離總和。

3. 甲、乙兩人玩遊戲，先在黑板上寫下 $\frac{1}{10}$ 和 $\frac{1}{11}$ 兩個分數。然後由甲先任意說出一個正分數，再由乙任意挑選黑板上的一個數將它替換成它和甲說出的數之和；再輪回甲繼續此一遊戲。如果在 120 回合內黑板上出現 1，則算甲勝，否則算乙勝。無論乙如何應對，請問甲有無必勝之策略？如有，請列出策略；如無，請證明。

甲有必勝之策略。

(i) 第一回合甲可先提出 $\frac{9}{10}$，則乙為避免立即輸掉必保留 $\frac{1}{10}$ 而將 $\frac{1}{11}$ 替換成 $\frac{109}{110}$，即此時黑板上的數為 $\frac{1}{10}$ 和 $\frac{109}{110}$；

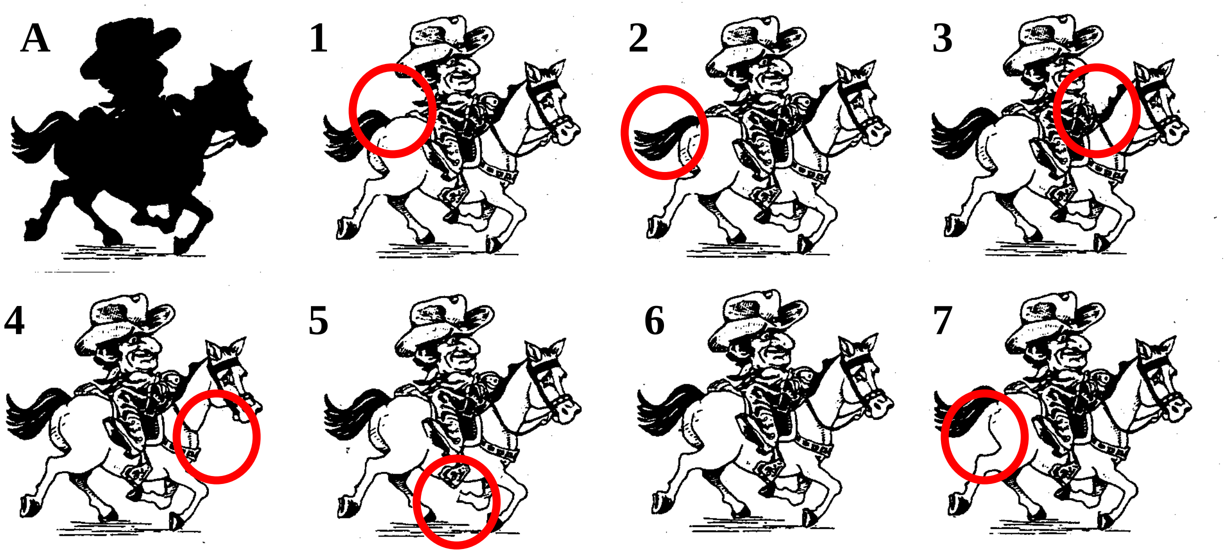
(ii) 第二回合甲可提出 $\frac{1}{110}$，則乙為避免立即輸掉必保留 $\frac{109}{110}$ 而將將 $\frac{1}{10}$ 替換成 $\frac{12}{110}$，即此時黑板上的數為 $\frac{12}{110}$ 和 $\frac{109}{110}$；

(iii) 第三回合甲繼續提出 $\frac{1}{110}$，則乙為避免立即輸掉必保留 $\frac{109}{110}$ 而將 $\frac{12}{110}$ 替換成 $\frac{13}{110}$，即此時黑板上的數為 $\frac{13}{110}$ 和 $\frac{109}{110}$；

(iv) 第四回合至第九十九回合甲都提出 $\frac{1}{110}$，則乙為避免立即輸掉必一直保留 $\frac{109}{110}$ 而將另一分數替換，因此時分母皆為 110，故其和之分子必每回合都增加 1，即第九十九回合後黑板上的數為 $\frac{13+96}{110}=\frac{109}{110}$ 和 $\frac{109}{110}$；

(v) 第一百回合甲仍提出 $\frac{1}{110}$，則無論乙如何選擇都無法避免地使黑板上出現 1。故甲在一百回合內有必勝之策略。

4. 請問編號 1 號到 7 號的牛仔中，哪一位的陰影是圖 A？(細小的黑點不同可能是試題印刷上的瑕疵。)



ANS：6 號