

2010 小學數學競賽選拔賽初賽試題

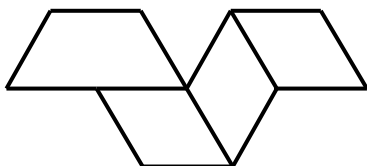
第二試：應用題 (考試時間 90 分鐘)

◎ 請將答案填入答案卷對應題號的空格內，只須填寫答案，不須計算過程。本題目卷正反面空白處可為作演算草稿紙。每題 25 分，共 300 分

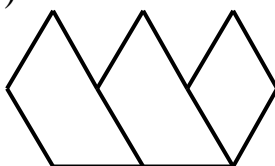
1. 下圖所示的紙片可分割為 12 個正三角形。若只能沿著粗黑線摺疊，請問下列哪一個圖形可被依此方式摺出？



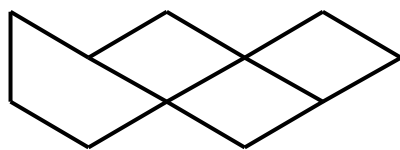
(A)



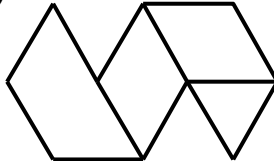
(B)



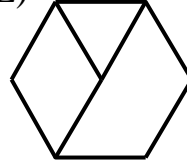
(C)



(D)



(E)



【參考解法】

實際操作後，可發現僅(E)可摺出。

答：(E)

2. 我清點口袋內的錢發現，如果增加我口袋現有錢數的一半，則我的錢就會等於哥哥口袋內的錢之半；如果哥哥口袋內的錢增加 $\frac{1}{4}$ 就會等於姊姊的口袋內的錢之 $\frac{2}{3}$ 。請問我口袋內的錢與姊姊口袋內的錢之比為何？



【參考解法】

將我口袋內的錢當成 1，則由題意知哥哥口袋內的錢為 $2 \times (1 + \frac{1}{2}) = 3$ ，故姊姊口

袋內的錢為 $(3 + 3 \times \frac{1}{4}) \times \frac{3}{2} = \frac{45}{8}$ ，由此可知我口袋內的錢與姊姊口袋內的錢之比為

$$1 : \frac{45}{8} = 8 : 45。$$

答：8 : 45

3. 有一本書從 1、2、3、…開始編頁，若它全部的頁碼共使用了 2010 個數碼，請問這本書共有多少頁？

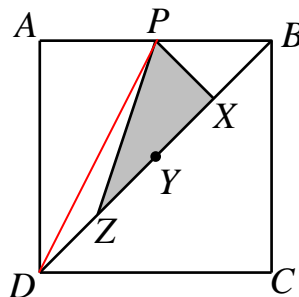


【參考解法】

可知頁碼為一位數時，共用去 9 個數碼、頁碼為二位數時，共用去 $90 \times 2 = 180$ 個數碼，以上合計用去 $9 + 180 = 189$ 個數碼，此時仍有 $2010 - 189 = 1821$ 個數碼可供三位數的頁碼使用。因為 $1821 \div 3 = 607$ ，所以頁碼為三位數的共 607 個，故共有 $9 + 90 + 607 = 706$ 頁。

答：706 頁

4. 如圖所示，在正方形 $ABCD$ 中，點 P 是 AB 邊上的中點， $BX = XY = YZ = DZ$ 。已知正方形之面積為 120 cm^2 ，請問 $\triangle PXZ$ 之面積為多少 cm^2 ？



【參考解法】

連接 DP 。因 DB 是對角線，故 $\triangle ADB$ 的面積為正方形面積的一半，即 $120 \times \frac{1}{2} = 60$ ；因 P 是 AB 邊上的中點，故 $\triangle BDP$

的面積為 $\triangle ADB$ 面積的一半，即 $60 \times \frac{1}{2} = 30$ ；因 $BX = XY = YZ = DZ$ ，故 XZ 的長度

為 DB 長度的一半，因此 $\triangle PXZ$ 的面積為 $\triangle BDP$ 面積的一半，即 $30 \times \frac{1}{2} = 15$ 。

答：15 cm^2

5. 兩數相除所得商為 9，餘數為 4。如果將被除數和除數都擴大為原來的三倍，則其被除數、除數、商、餘數之和等於 2373。請問原來的被除數是多少？



【參考解法一】

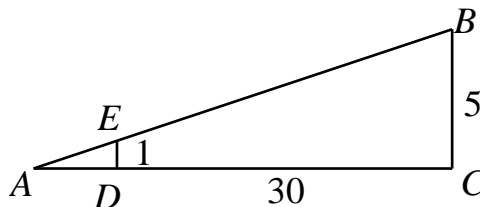
被除數和除數都擴大為原來的三倍，其所得商不變仍然為 9，餘數會擴大為原來的三倍，即為 12。因此被除數和除數都擴大為原來的三倍後之和等於 $2373 - 9 - 12 = 2352$ ，即原來被除數和除數之和為 784，扣掉餘數 4 等於除數之 10 倍，故除數為 78、原被除數為 706。

【參考解法二】

可令原被除數為 a 、除數為 b ，則知 $a = 9b + 4$ ，故 $3a = 27b + 12 = 9 \times (3b) + 12$ 。由原式餘數為 4 可知 a 大於 4，因此 $3a$ 大於 12，所以知在將被除數和除數都擴大為原來的三倍後商為 9、餘數為 12，故知 $3a + 3b + 9 + 12 = 2373$ ，即 $a + b = 784$ 。再由 $a = 9b + 4$ 知 $10b + 4 = 784$ ，所以 $b = 78$ 、 $a = 706$ 。

答：706

6. 下圖中，點 D 在 $\triangle ABC$ 的 AC 邊上、點 E 在 AB 邊上，線段 ED 與 BC 均垂直於線段 AC 。已知 $CB = 5 \text{ cm}$ 、 $DE = 1 \text{ cm}$ 、 $DC = 30 \text{ cm}$ ，請問線段 AD 的長度是多少 cm ？



【參考解法一】

$\triangle ABC$ 的面積即為 $\frac{1}{2} \times AC \times BC = \frac{5}{2}(AD+30)$ 。可觀察出四邊形 $BCDE$ 為梯

形，故其面積為 $\frac{(1+5) \times 30}{2} = 90 \text{ cm}^2$ ，再因 $\triangle ABC$ 可視為由 $\triangle ADE$ 與梯形

$BCDE$ 組成，故可知 $\triangle ABC$ 的面積為 $\frac{1}{2} \times AD \times DE + 90 = \frac{AD}{2} + 90$ 。故有

$\frac{5}{2}(AD+30) = \frac{AD}{2} + 90$ ，計算後知 $AD = \frac{15}{2} = 7\frac{1}{2}$ 。

【參考解法二】

$\triangle ABC$ 與 $\triangle ADE$ 相似，對應邊成比例，故 $AD:AC=ED:BC$ ，即

$AD:(AD+30)=1:5$ ，可得 $AD = 7\frac{1}{2}$ 。

答： $\frac{15}{2} = 7\frac{1}{2} = 7.5 \text{ cm}$

7. 有五個圓柱體量杯，A 量杯的半徑為 4 cm，杯內的水高 7 cm；B 量杯的半徑為 5 cm，杯內水高 6 cm；C 量杯的半徑為 6 cm，杯內的水高 5 cm；D 量杯的半徑為 7 cm，杯內的水高 4 cm；E 量杯的半徑為 8 cm，杯內的水高 3 cm。請問裝最多水的量杯內有多少 cm^3 的水？(π 取 3.14)



【參考解法】

因圓柱體的體積為底圓面積乘以高，故

A 量杯的水體積為 $4 \times 4 \times \pi \times 7 = 112 \times 3.14$ 、

B 量杯的水體積為 $5 \times 5 \times \pi \times 6 = 150 \times 3.14$ 、

C 量杯的水體積為 $6 \times 6 \times \pi \times 5 = 180 \times 3.14$ 、

D 量杯的水體積為 $7 \times 7 \times \pi \times 4 = 196 \times 3.14$ 、

E 量杯的水體積為 $8 \times 8 \times \pi \times 3 = 192 \times 3.14$ ，

所以 D 量杯內的水最多，有 $196 \times 3.14 = 615.44 \text{ cm}^3$ 的水。

答： 615.44 cm^3

8. 小明到超商購買 8 塊麵包、2 瓶果汁及 20 顆巧克力球，共花費 286 元；小杰購買 3 塊麵包、1 瓶果汁及 7 顆巧克力球，共花費 107 元。請問購買 1 塊麵包、1 瓶果汁及 1 顆巧克力球，共需花費多少元？



【參考解法一】

由小杰購買的物品可知 6 塊麵包、2 瓶果汁及 14 顆巧克力球，共值 214 元，將此與小明購買的物品比較，可知 2 塊麵包與 6 顆巧克力共值 72 元，再因 3 塊麵包、1 瓶果汁及 7 顆巧克力球，共值 107 元，所以購買 1 塊麵包、1 瓶果汁及 1 顆巧克力球，共需花費 $107 - 72 = 35$ 元。

【參考解法二】

將小杰購買的物品乘以三倍可知 9 塊麵包、3 瓶果汁及 21 顆巧克力球，共值 321

元，將此與小明購買的物品比較，即可得知購買 1 塊麵包、1 瓶果汁及 1 顆巧克力球，共需花費 $321-286=35$ 元。

答：35 元

9. 有四個互不相同的正整數，它們當中任意兩個數的和是 2 的倍數、任意三個數的和是 3 的倍數。請問滿足上述條件的最小的四個數乘積是多少？



【參考解法】

由任意兩個數的和是 2 的倍數可知任兩數的差都是 2 的倍數，再由任意三個數的和是 3 的倍數可得知任兩數的差都是 3 的倍數，故任兩數的差為 6 的倍數。為尋找最小的四個數之乘積，故此四數可選為 1、7、13、19，其乘積為 1729。

答：1729

10. 甲、乙二人輪流分糖，甲先拿一個，乙再拿二個，甲再拿三個，乙再拿四個，…，依此方式繼續下去，第 n 次取糖的人再取 n 顆糖，如果第 n 次取糖時所剩的糖少於 n 顆糖則拿光所剩的糖。已知甲最後共拿到 125 顆糖，請問乙總共拿到多少顆？



【參考解法】

甲總共拿到奇數顆糖故知由甲先拿，可知甲取 k 次時顆數之總和為從 1 開始連續 k 個奇數的和。因從 1 開始連續 k 個奇數的和為一完全平方數 k^2 ，且而最接近 125 且未超過 125 的完全平方數為 $121=11^2$ ，故最後為甲在第 $11+1=12$ 次取時取光所有的糖，乙取了 11 次，因此可知乙拿的顆數為從 2 開始連續 11 個偶數的和，即為 $2+4+6+8+10+12+14+16+18+20+22=132$ 顆。

答：132 顆

11. A、B、C、D、E 五個人參加投籃比賽，每人投 10 個球。已知每人至少投中 2 球，且 A、B、C 三人共投中 15 球；B、C、D 三人共投中 12 球。A 投中最多球而 E 投中 6 個球排名第三。請問 A 投中幾個球？



【參考解法】

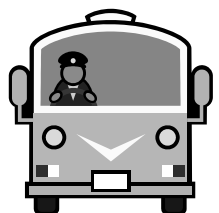
由條件可判斷出 A 比 D 多投中 3 球。因 A 投中最多球而 E 投中 6 個球排名第三，故 A 投中的球數至少為 8 球。

若 A 投中 8 球，則 D 投中 5 球，且 B、C 兩人間恰有一個投中 7 球，另一人則僅投中 $15-8-7=0$ 球，矛盾；

若 A 投中 9 球，此時 D 投中 6 球，則 B、C 共投中 6 球，故 E 排名第二，矛盾；因此 A 必投中 10 球，則 B、C 兩人合計投中 $15-10=5$ 球，即兩人投中球數必少於 6 球，故兩人排名低於 E，此時 D 投中 7 球，排名第二。

答：10 球

12. 某市有 A、B 兩座機場，它們之間有巴士與電車接駁。從 A 機場到 B 機場每間隔 2 分鐘同步發出一輛巴士與一輛電車，巴士全程行駛時間 60 分鐘，電車全程行駛時間 15 分鐘。請問電車從 A 機場行駛到 B 機場將會追過多少輛巴士？



【參考解法】

將 A、B 視為一直線，令 A 的位置為 0、B 的位置為 60，即將 A、B 之間的距離視為 60 單位，則電車速度為每分鐘走 4 單位、巴士速度為每分鐘走 1 單位，即電車每分鐘比巴士多走 3 單位，因此電車 15 分鐘比巴士多走 45 單位。因從 A 到 B 的巴士每 2 分鐘發出一班，故在要發車時，此直線上 0、2、4、6、 \dots 、58、60 的位置上都有巴士，因此此時位置在 45 以內的巴士都會被電車追過，即位置在 2、4、6、 \dots 、44 上的巴士會被追過，故共有 22 輛巴士會被追過。

答：22 輛