

2010 小學數學競賽選拔賽決賽(一)試題

第一試 應用題 (考試時間 90 分鐘)

◎ 請將答案填入答案卷對應題號的空格內，只須填寫答案，不須計算過程。本題目卷正反面空白處可為作演算草稿紙。每題 10 分，共 120 分

1. 請問四位數中共有多少個數恰有三個正因數？

【參考解法】

若一個數恰有 3 個正因數，則其質因數分解式應為 p^2 的型態，其中 p 為質數。故四位數中有多少個數恰有 3 個正因數即為問有多少個質數其平方為四位數。因 $31^2 = 961 < 1000 < 1024 = 32^2 < 10000 = 100^2$ ，而 32 與 100 間的質數為 37、41、43、47、53、59、61、67、71、73、79、83、89、97 共 14 個。

ANS : 14 個

2. $\underbrace{5959 \dots 59}_{2010 \text{ 個 } 59}$ 除以 11 所得餘數是多少？

【參考解法】

因 $2002 = 11 \times 182$ ，故可知 $\underbrace{5959 \dots 59}_{2002 \text{ 個 } 59}$ 的奇數位數碼之和與偶數位數碼之和皆為 11 的倍數，因此差也必為 11 的倍數，而 $\underbrace{5959 \dots 59}_{2010 \text{ 個 } 59} = \underbrace{5959 \dots 59}_{2002 \text{ 個 } 59} \times 10^{16} + \underbrace{5959 \dots 59}_{8 \text{ 個 } 59}$ ，故 $\underbrace{5959 \dots 59}_{2010 \text{ 個 } 59}$ 除以 11 所得餘數與 $\underbrace{5959 \dots 59}_{8 \text{ 個 } 59}$ 除以 11 所得餘數相同；而 $\underbrace{5959 \dots 59}_{8 \text{ 個 } 59}$ 的奇數位數碼和與偶數位數碼和之差為 $9 \times 8 - 5 \times 8 = 32 = 11 \times 2 + 10$ ，故 $\underbrace{5959 \dots 59}_{7 \text{ 個 } 59} 49$ 可被 11 整除；可得知 $\underbrace{5959 \dots 59}_{8 \text{ 個 } 59}$ 除以 11 所得餘數為 10，所求為 10。

ANS : 10

3. 有一只十二小時制的手錶每小時慢 5 秒鐘，而另一只手錶每小時快 3 秒鐘。現將兩只手錶都撥準同樣時間，請問多少小時後兩只手錶所指示的時間再度相同？

【參考解法】

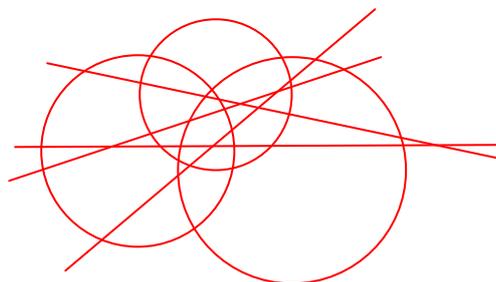
因兩只手錶每小時差了 $5 + 3 = 8$ 秒鐘，而兩只手錶所指示的時間再度相同時代表所指示的時間是差了 12 小時，即 43200 秒鐘，故所經過的時間為 $43200 \div 8 = 5400$ 小時。

ANS : 5400 小時

4. 在平面上畫三個半徑互不同的圓與四條互不平行的直線，請問最多能得到多少個交點？

【參考解法】

因兩條不平行的直線最多可有 1 個交點，因此四條不平行的直線最多有 $6 \times 1 = 6$ 個交點；



因兩個半徑不同的圓最多可有 2 個交點，因此三個半徑不同的圓最多有 $3 \times 2 = 6$ 個交點；

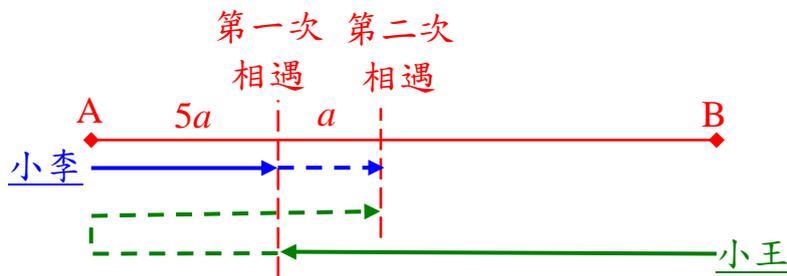
因一個圓和一條直線最多可有 2 個交點，故一個圓和四條不平行的直線最多可有 $4 \times 2 = 8$ 個交點，因此三個圓和四條不平行的直線最多可有 $3 \times 8 = 24$ 個交點；所以平面上最多可有 $6 + 6 + 24 = 36$ 個交點，如圖所示。

ANS : 36 個

5. 小李以勻速步行從 A 地走往 B 地，小王同時以勻速騎車從 B 地往 A 地。出發後 50 分鐘兩人在途中相遇。小王到 A 地後立即折返 B 地，在第一次相遇後又經過 10 分鐘小王在途中追上小李。小王到 B 地後立即折返 A 地，這樣不斷下去，直到小李到達 B 地為止。請問他們從出發到結束，一共遇到（包括相遇及追上，也包括在 A 地或 B 地相遇）多少次？

【參考解法】

可知兩人第一次相遇時至第二次遇到時所用的時間為出發至第一次相遇時所花時間的 $\frac{1}{5}$ ，即兩人出發至第一次相遇時所行的距離為第一次相遇時至第二次相遇時所行的距離的 5 倍，故若令小李第一次相遇時至第二次相遇時所行的距離為 a ，則小李出發至第一次相遇時所行的距離為 $5a$ 、小王第一次相遇時至第二次相遇時所行的距離為 $5a + 5a + a = 11a$ ，換言之，小王速度為小李的 11 倍，故小李到達 B 地時，小王已來回兩地之間 11 次。因小王每趟皆遇小李一次，故共相遇 11 次。



ANS : 11

6. 將 8 顆巧克力糖全部分給三位小朋友，每位至少要分到一顆。請問共有多少種不同的分法？

【參考解法一】

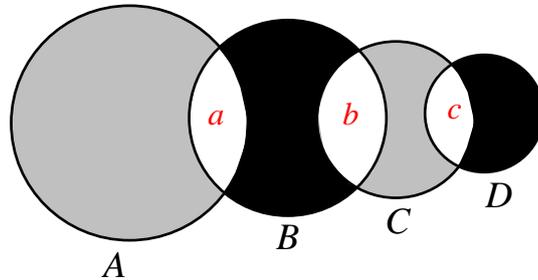
因 $8 = 1 + 1 + 6 = 1 + 2 + 5 = 1 + 3 + 4 = 2 + 2 + 4 = 2 + 3 + 3$ ，所以糖果數的分配法有 5 種，其中 $(1, 2, 5)$ 與 $(1, 3, 4)$ 分給三位小朋友的分法各有 $3 \times 2 \times 1 = 6$ 種合計 12 種、 $(1, 1, 6)$ 、 $(2, 2, 4)$ 、 $(2, 3, 3)$ 分給三位小朋友的分法各有 3 種合計 9 種，因此總共有 $12 + 9 = 21$ 種不同的分法。

【參考解法二】

可將巧克力排成一排，並將每一顆巧克力看成 1，則因每位小朋友至少要分到一顆，故可看成在 1 1 1 1 1 1 1 1 這 8 個 1 之間的七個空格，從中選取二個隔開分成三堆，故有 $7 \times 6 \div 2 = 21$ 種方法。

ANS : 21 種

7. 將四個圓如下圖方式安排，已知圓 A 之半徑為 12 cm、圓 B 之半徑為 10 cm、圓 C 之半徑為 8 cm、圓 D 之半徑為 6 cm。請問圓中塗灰色部分之面積總和與塗黑色部分之面積總和的差為多少 cm^2 ？(取 $\pi = \frac{22}{7}$)



【參考解法】

如圖所示，令重疊的三個區域面積分別為 a 、 b 、 c ，則塗灰色部分的面積為 $(12 \times 12\pi - a) + (8 \times 8\pi - b - c) = 208\pi - a - b - c$ 、塗黑色部分的面積為 $(10 \times 10\pi - a - b) + (6 \times 6\pi - c) = 136\pi - a - b - c$ ，故其差為

$$(208\pi - a - b - c) - (136\pi - a - b - c) = 72\pi = 72 \times \frac{22}{7} = \frac{1584}{7}$$

$$\text{ANS: } 72 \times \frac{22}{7} = \frac{1584}{7} \text{ cm}^2$$

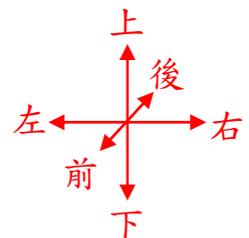
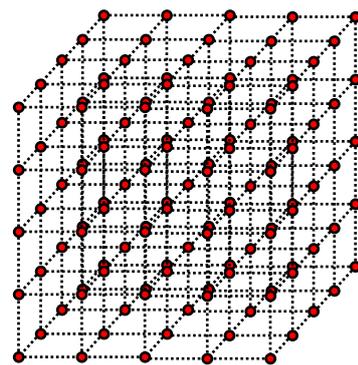
8. 在 $5 \times 5 \times 5$ 的立體棋盤上，兩人各執黑棋或白棋輪流擺在棋盤上，最先使得自己所執顏色的五個棋子連成一直線(包括水平線、鉛垂線、豎直線、平面主對角線、立體主對角線)者勝。請問在此立體棋盤上共有幾條可以得勝的不同直線？

【參考解法】

考慮此立體棋盤上三個方向的平面：上下、前後、左右，其中每一個方向皆有五層平面。

1. 從每個方向看去，都有 25 條平行的連線。因此三個不同方向共有 $3 \times 25 = 75$ 條此類連線；
2. 從每個方向看去，都有 10 條平面主對角線的連線。因此三個不同方向共有 $10 \times 3 = 30$ 條此類連線；
3. 另有 4 條立體主對角線。

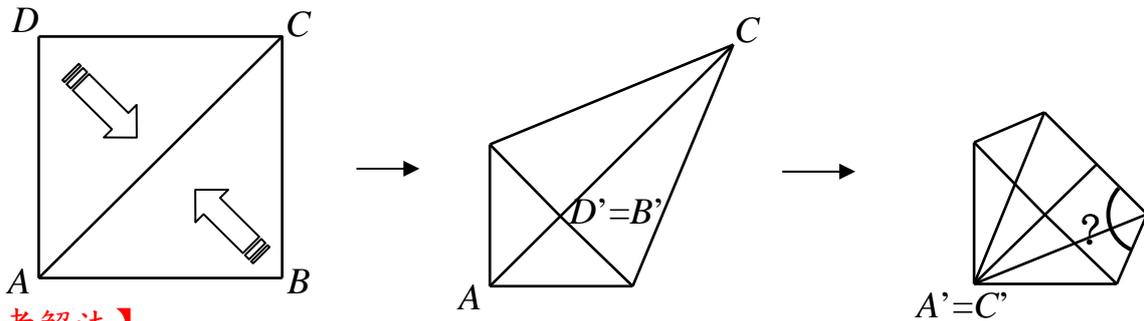
所以此立體棋盤上共有 $75 + 30 + 4 = 109$ 條可以得勝的不同直線。



ANS: 109 條

(註：對於 $n \times n \times n$ 的立體棋盤則有 $\frac{(n+2)^3 - n^3}{2}$ 條)

9. 將一張正方形紙片依下圖所示方式摺疊：首先摺疊線段 CD 、線段 BC 使之分別與對角線 AC 重合。接著摺疊點 C 使它與點 A 重合。請問下右圖中標記有問號的角度為多少度？



【參考解法】

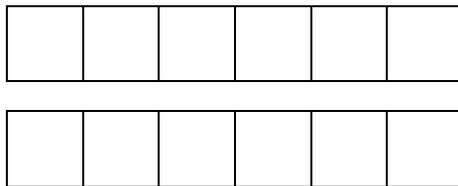
由摺疊方式可知 $\angle PA'Q = 45^\circ$ 且 $PA' = QA'$ ，故

$$\angle PQA' = \frac{180^\circ - 45^\circ}{2} = 67\frac{1}{2}^\circ = 67.5^\circ ;$$

可再從最後一次的摺疊方式知 $\angle RQP$ 的外角等於 $\angle PQA'$ ，故 $\angle RQP = 180^\circ - 67.5^\circ = 112.5^\circ$ 。

ANS: 112.5°

10. 某大廈的屋頂有兩排霓虹燈，每排都是由六個正方形組成。每次上排的方格都會有二個方格內的燈會亮，下排的方格每次都會有三個方格內的燈會亮。



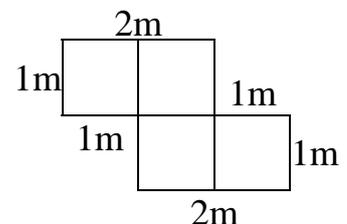
每次亮燈 3 秒後就會變換形式，直到全部形式都輪過一遍，接著才繼續重複循環下去。請問從開始亮燈到輪完一輪所有不同的形式共費時多少分鐘？

【參考解法】

上排一次亮 2 個，共有 $1+2+3+4+5=15$ 種亮法；下排一次亮 3 個，可看成亮 1 個，搭配其餘 5 個亮 2 個，此時每一種亮法會算到 3 次，故共有 $6 \times (1+2+3+4) \div 3 = 20$ 種亮法，因此合計有 15×20 種形式，需花費 $\frac{3 \times 15 \times 20}{60} = 15$ 分鐘。

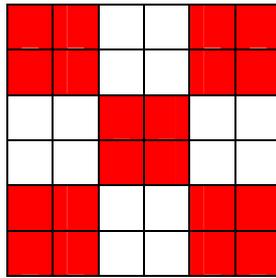
ANS: 15 分鐘

11. 一個 $6\text{ m} \times 6\text{ m}$ 的正方形房間的地板，打算用如右圖所示的 Z 形塑膠墊子鋪在它上面，墊子可翻轉但不可以切開也不可以重疊。請問用此塑膠墊子至多可以蓋住地板多少 m^2 ？

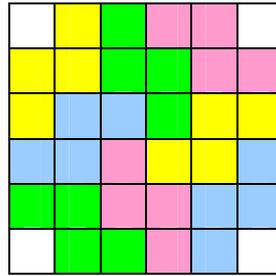


【參考解法】

將 $6\text{ m} \times 6\text{ m}$ 的正方形房間地板畫成邊長為 1 m 的小方格，並依如圖所示塗色：

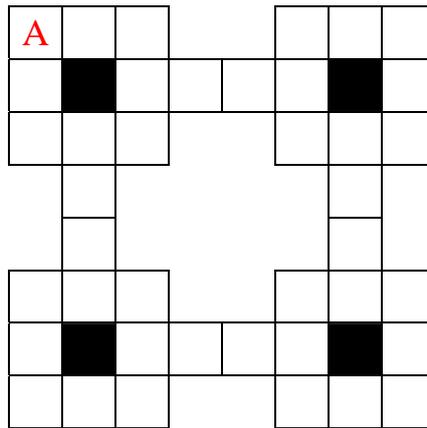


則無論 Z 形塑膠墊子如何放置，都會佔有 1 個或 3 個紅色小方格；若 Z 形塑膠墊子可鋪滿房間，則需 9 片 Z 形塑膠墊子，因此會佔有奇數個紅色小方格，與紅色小方格有 20 個矛盾。因此最多可用 8 片塑膠墊子，用以下方式可鋪 32 m^2 ：



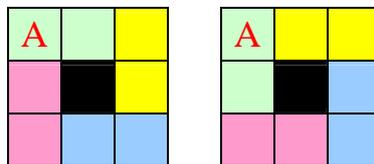
Ans: 32 m^2

12. 下圖所示的步道中，每個小正方形邊長都是 1 m ，用 $1 \text{ m} \times 2 \text{ m}$ 的磁磚將它鋪滿，請問共有多少種不同的鋪法？



【參考解法】

對於 A 點來說，共有橫放及直放兩種不同鋪法：



每一種擺法都恰鋪滿一個空心的 3×3 正方形，正方形外只有一種鋪法。而在此步道中共有四個此類的正方形，因此共有 $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$ 種方法。

ANS : 16

【參考解法】

假設一個真幣的重量為 a 毫克。將這六個袋子從 1 號開始依序編號到 6 號，並且從 1 號袋開始依序拿出 1 個、3 個、9 個、27 個、81 個、243 個硬幣。若全是真幣，理論上總重量應為 $a+3a+9a+27a+81a+243a=364a$ 毫克，但因有假幣，且一袋假幣比真幣輕 2 毫克、另一袋假幣輕 4 毫克，故真正的重量會比 $364a$ 少。

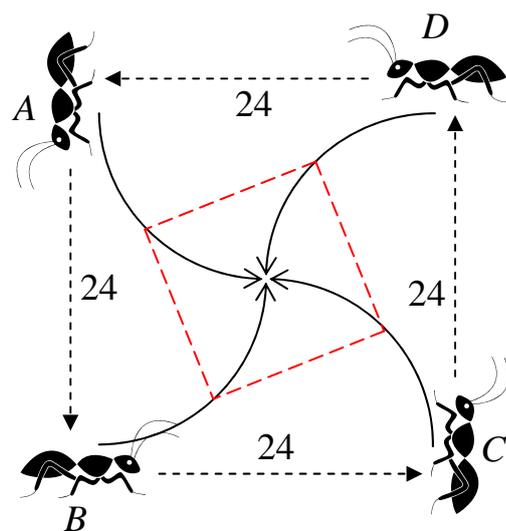
若假幣為 1 號、2 號袋，則少的部分之數值為 $2 \times 1 + 4 \times 3 = 14$ 或 $4 \times 1 + 2 \times 3 = 10$ ；
若假幣為 1 號、3 號袋，則少的部分之數值為 $2 \times 1 + 4 \times 9 = 38$ 或 $4 \times 1 + 2 \times 9 = 22$ ；
若假幣為 1 號、4 號袋，則少的部分之數值為 $2 \times 1 + 4 \times 27 = 110$ 或 $4 \times 1 + 2 \times 27 = 58$ ；
若假幣為 1 號、5 號袋，則少的部分之數值為 $2 \times 1 + 4 \times 81 = 326$ 或 $4 \times 1 + 2 \times 81 = 166$ ；
若假幣為 1 號、6 號袋，則少的部分之數值為 $2 \times 1 + 4 \times 243 = 974$ 或 $4 \times 1 + 2 \times 243 = 490$ ；
若假幣為 2 號、3 號袋，則少的部分之數值為 $2 \times 3 + 4 \times 9 = 42$ 或 $4 \times 3 + 2 \times 9 = 30$ ；
若假幣為 2 號、4 號袋，則少的部分之數值為 $2 \times 3 + 4 \times 27 = 114$ 或 $4 \times 3 + 2 \times 27 = 66$ ；
若假幣為 2 號、5 號袋，則少的部分之數值為 $2 \times 3 + 4 \times 81 = 330$ 或 $4 \times 3 + 2 \times 81 = 174$ ；
若假幣為 2 號、6 號袋，則少的部分之數值為 $2 \times 3 + 4 \times 243 = 978$ 或 $4 \times 3 + 2 \times 243 = 498$ ；
若假幣為 3 號、4 號袋，則少的部分之數值為 $2 \times 9 + 4 \times 27 = 126$ 或 $4 \times 9 + 2 \times 27 = 90$ ；
若假幣為 3 號、5 號袋，則少的部分之數值為 $2 \times 9 + 4 \times 81 = 342$ 或 $4 \times 9 + 2 \times 81 = 198$ ；
若假幣為 3 號、6 號袋，則少的部分之數值為 $2 \times 9 + 4 \times 243 = 990$ 或 $4 \times 9 + 2 \times 243 = 522$ ；
若假幣為 4 號、5 號袋，則少的部分之數值為 $2 \times 27 + 4 \times 81 = 378$ 或 $4 \times 27 + 2 \times 81 = 270$ ；
若假幣為 4 號、6 號袋，則少的部分之數值為 $2 \times 27 + 4 \times 243 = 1026$ 或 $4 \times 27 + 2 \times 243 = 594$ ；
若假幣為 5 號、6 號袋，則少的部分之數值為 $2 \times 81 + 4 \times 243 = 1134$ 或 $4 \times 81 + 2 \times 243 = 810$ ；

因以上數值皆不相同，故可利用此策略判斷出來。

3. 有四隻螞蟻分別位於邊長為 24 cm 的正方形之四個頂點，任何時刻，A 都保持與 B 行進方向垂直的方向前進、B 都保持與 C 行進方向垂直的方向前進、C 都保持與 D 行進方向垂直的方向前進、D 都保持與 A 行進方向垂直的方向前進。若這四隻螞蟻都以相同的勻速爬行，它們的路徑成一螺旋線，且最後在中心相遇。請問四隻螞蟻爬行的路徑總和是多少 cm？

【參考解法】

可知這四隻螞蟻在相遇前所在位置都恰是一個正方形的頂點；以 B 的觀點看，A 都保持與 B 行進方向垂直的方向前進，A 與 B 一直以一隻螞蟻爬行的勻速互相靠近，而 A 與 B 原本相距 24 cm，故 A 走 24 cm 後會與 B 相遇。而 B 也以勻速並以直線往 C 走去，因此 B 必須走 24 cm 才與 C 相遇；同理，C、D 也都必須走 24 cm 後在正方形之中心相遇，故合計走 $24 \times 4 = 96$ cm。



Ans: 96 cm

4. 以下兩圖中有十二個相異的小方格。請找出它們，並在右圖中把它們圈出。

