

2010 小學數學競賽選拔賽決賽(二)試題

第一試 應用題 (考試時間 90 分鐘)

◎ 請將答案填入答案卷對應題號的空格內，只須填寫答案，不須計算過程。本題目卷正反面空白處可為作演算草稿紙。每題 10 分，共 120 分

1. 在 101~150 這五十個自然數中，質數個數所佔的百分比是多少？

【參考解法】

因 101 到 150 間的質數為 101、103、107、109、113、127、131、137、139、149，共有十個，故所佔的百分比為 20%。

答：20%

2. 將一個正立方體沿著各邊中點切為 8 個小正立方體。請問這些小正立方體的表面積總和與原正立方體表面積之比為何？

【參考解法一】

可知每一個小正立方體有 3 面為原來正立方體的表面的一部份，而每一個小正立方體有 6 面，且這 8 個小正立方體組成了原來正立方體，故這些小正立方體的表面積總和為原正立方體表面積的 $6 \div 3 = 2$ 倍，即其比為 2:1。

【參考解法二】

假設原來正立方體的邊長為 2，則每一個小正立方體的邊長為 1。這些小正立方體的每個表面積為 6，總和為 48，原正立方體之表面積為 24，即其比為 2:1。

答：2:1

3. 請問 $\underbrace{111 \cdots 1}_{2010 \text{個}} \times 2010$ 之乘積的數碼和是多少？

【參考解法一】

原式 = $\underbrace{111 \cdots 1}_{2010 \text{個}} \times (10 + 2000) = \underbrace{111 \cdots 10}_{2010 \text{個}} + \underbrace{222 \cdots 2000}_{2010 \text{個}} = 22 \underbrace{333 \cdots 3110}_{2008 \text{個}}$ ，故其數碼和為 $2 \times 2 + 3 \times 2008 + 1 \times 2 = 6030$ 。

【參考解法二】用列直式方式作此乘法，可發現每一位數均無發生進位的情況，故其乘積之數碼和為 $2010 \times 3 = 6030$ 。

答：6030

4. 小杰的自行車腳踏輪有 36 齒、後輪有 12 齒。如果後輪轉一圈可前進 2 公尺，請問小杰每分鐘要踏腳踏輪多少圈才能使車速達每小時 18 公里？

【參考解法】

由 $36:12=3:1$ 可知每踏腳踏輪 1 圈可使後輪轉 3 圈，即前進 $3 \times 2 = 6$ 公尺。因每小時 18 公里即為每分鐘 300 公尺，故每分鐘要踏 $300 \div 6 = 50$ 圈。

答：50 圈

5. 將 8 顆巧克力糖全部分給三位小朋友，不限定每人至少要分到一顆。請問共有多少種不同的分法？

【參考解法一】

因 $8 = 0 + 0 + 8 = 0 + 1 + 7 = 0 + 2 + 6 = 0 + 3 + 5 = 0 + 4 + 4 = 1 + 1 + 6 = 1 + 2 + 5 = 1 + 3 + 4 = 2 + 2 + 4 = 2 + 3 + 3$

，故糖果數有 10 種分配法，其中(0, 1, 7)、(0, 2, 6)、(0, 3, 5)、(1, 2, 5)與(1, 3, 4)分給三位小朋友的分法各有 $3 \times 2 \times 1 = 6$ 種合計 30 種、(0, 0, 8)、(0, 4, 4)、(1, 1, 6)、(2, 2, 4)、(2, 3, 3)分給三位小朋友的分法各有 3 種合計 15 種，因此總共有 $30 + 15 = 45$ 種不同的分法。

【參考解法二】

此問題可看成將 11 顆巧克力糖分給三位小朋友，每人至少要分到一顆。可將巧克力排成一排，並將每一顆巧克力看成 1，則因每位小朋友至少要分到一顆，故可看成在 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 這 11 個 1 之間的十個空格，從中選取二個分成三堆，故有 $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45$ 種方法。

答：45 種

6. 有一座裁紙刀，每次至多可以裁 200 張紙厚度的紙，紙張可以堆疊但不可以摺，由一張大紙開始，欲恰好切出 2010 張小紙條，請問至少要裁切多少次？

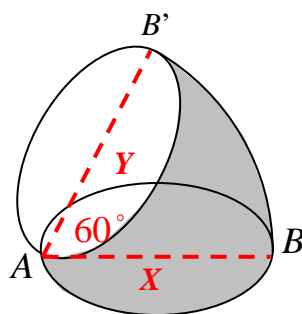
【參考解法】

可知在未超過 200 張時，每裁切一次，可使張數變為 2 倍，若超過 200 張時，則每裁切一次只能增加 200 張。

因 $2010 = 200 \times 9 + 210$ ，故至少有 9 次裁切必須是在超過 200 張時裁切，再因為 $2^7 = 128 < 210 < 256 = 2^8$ ，故知要得到 210 張紙至少要裁切 8 次，即至少要裁切 $9 + 8 = 17$ 次才能得到 2010 張紙；若以「→」代表每裁切一次，可利用以下 17 次切法：1→2→4→8→16→32→64→128→256→456→656→856→1056→1256→1456→1656→1856→2010，其中最後一次切時僅需拿出 154 張。

答：17 次

7. 有一橢圓形家具平放在客廳，其最長的部分為 AB，長度為 6 m。小明將它以 A 點為軸，把整個家具逆時針旋轉 60° ，此時 B 點移動到 B'。請問此家具下緣掃過的面積(即為陰影部分)為多少 m^2 ？(取 $\pi = 3.14$)



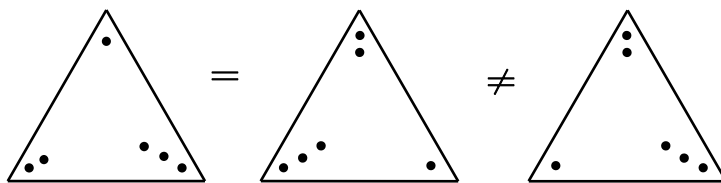
【參考解法】

如右圖所示，此家具所掃過的部分即為陰影部分，且可觀察出區域 X 與區域 Y 的面積一樣，故所求面積即為扇形之面積

$$3.14 \times 6 \times 6 \times \frac{60^\circ}{360^\circ} = 3.14 \times 6 = 18.84 m^2$$

答：18.84 m^2

8. 有一種三角形骨牌是在正三角形骨牌的三個角落分別標上 0、1、2、3、4、5、6 個點，骨牌旋轉後在角落的點數全對應相同則視為是同一片骨牌，骨牌不可翻轉。請問共有多少片不同的骨牌？



【參考解法】

(1) 若三個角落的點數都不相同時，則有 $7 \times 6 \times 5$ 種排法，但因旋轉後在角落的點

數全對應相同則視為同一骨牌，故一片骨牌被算了三次，因此共有
 $7 \times 6 \times 5 \div 3 = 70$ 片骨牌；

(2) 若三個角落的點數中有兩個相同、一個不相同時，則從 7 個數中選取一個數作為這兩個相同的點數，共有 7 種選法，又從其它的 6 個數中選取一個數作為這個不相同的點數，故共有 $7 \times 6 = 42$ 片骨牌；

(3) 若三個角落的點數都相同時，共有 7 片骨牌；

因此合計有 $70 + 42 + 7 = 119$ 片不同的骨牌。 答：119 片

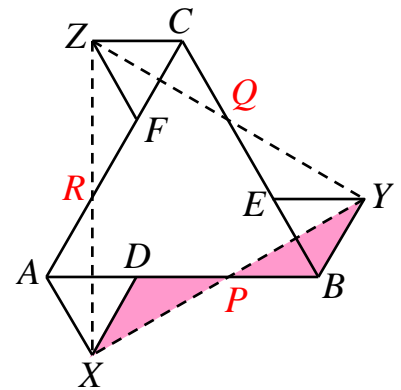
9. 在 $1! \times 2! \times 3! \times \cdots \times 99! \times 100!$ 中至少要刪去幾項才能使剩下的項的所得的乘積是完全平方數？(註： $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n$ ，每個 $n!$ 算一項)

【參考解法】

可觀察出 $(2n)! \times (2n-1)! = 2n \times [(2n-1)!]^2$ ，所以可令 $1! \times 2! \times 3! \times \cdots \times 99! \times 100! = 100 \times 98 \times 96 \times 94 \times \cdots \times 4 \times 2 \times A^2 = 2^{50} \times 50! \times A^2$ ，因此刪去 $50!$ 這一項即可使之為完全平方數。

答：1 項

10. 在正三角形 ABC 的三邊上分別向外作小正三角形 $\triangle AXD$ 、 $\triangle BYE$ 、 $\triangle CZF$ ， $CF = AD = EB = \frac{1}{3}AB$ ，如圖所示。已知 $\triangle ABC$ 之面積為 36 cm^2 ，請問 $\triangle XYZ$ 之面積為多少 cm^2 ？



【參考解法】

如圖所示，考慮 $\triangle DPX$ 與 $\triangle BPY$ 。因為 $\angle DPX = \angle BPY$ 、 $\angle XDP = 120^\circ = \angle YBP$ 、 $XD = \frac{1}{3}AB = \frac{1}{3}BC = BY$ ，故 $\triangle DPX$

與 $\triangle BPY$ 全等；同理 $\triangle YQE$ 與 $\triangle ZQC$ 全等、 $\triangle ZRF$ 與 $\triangle XRA$ 全等，又故 $\triangle XYZ$ 之面積 = $\triangle ABC$ 的面積 + $\triangle FCZ$ 的面積 + $\triangle ADX$ 的面積 + $\triangle BEY$ 的面積。因

$CF = AD = EB = \frac{1}{3}AB$ ，故 $\triangle FCZ$ 的面積、 $\triangle ADX$ 的面積與 $\triangle BEY$ 的面積皆為 $\triangle ABC$

之面積的 $\frac{1}{9}$ ，因此 $\triangle XYZ$ 之面積為 $36 + 4 + 4 + 4 = 48 \text{ cm}^2$ 。

答：48 cm^2

11. 忠犬小八每天都從家中跑到車站去迎接它的主人，並準時於下午五時到達車站見到它的主人後立即跑回家，它的主人搭乘的電車通常也都準時於下午五時抵達。但是有一天，它的主人提早下班於下午四時就抵達車站，他直接由車站步行回家。在半途中他見到正從家中朝車站方向跑的小八，兩者相遇後，小八立即以與平常相同的速度跑回家。當小八到家時比平常到家時間提早 10 分鐘。請問小八跑步的速度是它主人步行速度的幾倍？

【參考解法】

令相遇地點為 A 點。因小八到家時比平常到家時間提早 10 分鐘，可知主人走的距離讓小八走僅需 5 分鐘，即小八於 4 時 55 分到達 A 點，此時主人走了 55 分鐘。而因移動距離相同時，速度與時間之比為反比，故小八的速度為主人步行速度的 $55 \div 5 = 11$ 倍。

答：11 倍

12. 令 $N = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times 2009 \times 2010$ 。已知 N 可以被 $\underbrace{2009 \times 2009 \times 2009 \times \cdots \times 2009}_{k \text{ 個}}$

整除。請問 k 的最大值是什麼？

【參考解法】

$2009 = 7^2 \times 41$ ，故 $\underbrace{2009 \times 2009 \times 2009 \times \cdots \times 2009}_{k \text{ 個}} = 7^{2k} \times 41^k$ 。

因 $\left[\frac{2010}{41} \right] = 49$ 、 $\left[\frac{2010}{41^2} \right] = 1$ ，故 N 的質因數分解式中，41 的幕次為 $49+1=50$ ；

因 $\left[\frac{2010}{7} \right] = 287$ 、 $\left[\frac{2010}{7^2} \right] = 41$ 、 $\left[\frac{2010}{7^3} \right] = 5$ ，故 N 的質因數分解式中，7 的幕次為 $287+41+5=333 > 100$ ，故 k 的最大值是 50。

答：50

2010 小學數學競賽選拔賽決賽(二)試題

第 二 試: 綜合能力測驗 (考試時間 60 分鐘)

縣市_____國民小學____年級 編號：_____姓名：_____性別：____

請將答案填入考卷中對應題號的空位內，第 1、2、3 題必須詳細寫下想法或理由，每題 25 分，共 100 分。

1. 有五位學生的作業簿忘記寫姓名，老師只好將作業簿隨機發還給五位學生。請問有多少種情況學生全都不是拿到自己的作業簿？

【參考解法】

令這五位學生為 $A、B、C、D、E$ ，作業簿為 $a、b、c、d、e$ 。

可知將作業簿分給五位學生的全部情況共有 $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$ 種。

- (1) 五位學生全取到自己的作業簿恰有 1 種情況；
- (2) 五位學生中恰四位取到自己的作業簿不可能發生；
- (3) 五位學生中恰三位取到自己的作業簿時，即另二位學生取錯作業時，因二位學生取錯必是互相拿錯這一種情形，故有 $(4+3+2+1) \times 1 = 10$ 種情況；
- (4) 五位學生中恰二位取到自己的作業簿時，即另三位學生都取錯作業時。假設 $A、B$ 取到自己的作業簿、而 $C、D、E$ 三人都取錯，則有以下 2 種情況：

C	D	E
d	e	c
e	c	d

因二位學生取到自己的作業簿有 $4+3+2+1=10$ 種情況，而由上面的例子可知另三位學生都取錯時有 2 種情況，故共有 $10 \times 2 = 20$ 種情況；

- (5) 五位學生中僅一位取到自己的作業簿時，即另四位學生都取錯作業時。假設 A 取到自己的作業簿、而 $B、C、D、E$ 四人都取錯，則有以下 9 種情況：

<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>E</i>
<i>c</i>	<i>b</i>	<i>e</i>	<i>d</i>
<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>b</i>
<i>c</i>	<i>e</i>	<i>b</i>	<i>d</i>
<i>d</i>	<i>b</i>	<i>e</i>	<i>c</i>
<i>d</i>	<i>e</i>	<i>b</i>	<i>c</i>

<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>E</i>
<i>d</i>	<i>e</i>	<i>c</i>	<i>b</i>
<i>e</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>
<i>e</i>	<i>d</i>	<i>b</i>	<i>c</i>
<i>e</i>	<i>d</i>	<i>c</i>	<i>b</i>

因僅一位取到自己的作業簿有 5 種可能，而由上面的例子可知另四位學生都取錯時有 9 種情況，故共有 $5 \times 9 = 45$ 種情況；

所以五位學生全取錯作業簿的情況有 $120 - 1 - 10 - 20 - 45 = 44$ 種。

答：44 種

2. 有 64 位同學，每人各得知一條消息，並且任意兩人所得的消息都互不相同。他們用電話兩兩互相告訴對方所得知的全部消息，電話沒有三方或多方通話的功能。假設每次通話用 1 分鐘，請問至少需要多少分鐘才能使每個人都知道全部的消息？(您必須給出通話的策略並證明時間不能再少。)

【參考解法】

因每次通話皆為 1 分鐘，且開始時每人僅知一條消息，故每一次都是同時通話且每人知道的消息數都是至多成為對話中知道較多消息的人的 2 倍；因共有 64 條不同的消息，且 $64 = 2^6$ ，所以至少需時 6 分鐘，可利用以下方式達成：

令這 64 位同學為 a_1, a_2, \dots, a_{64} ，以下用括號表示通電話的對象。

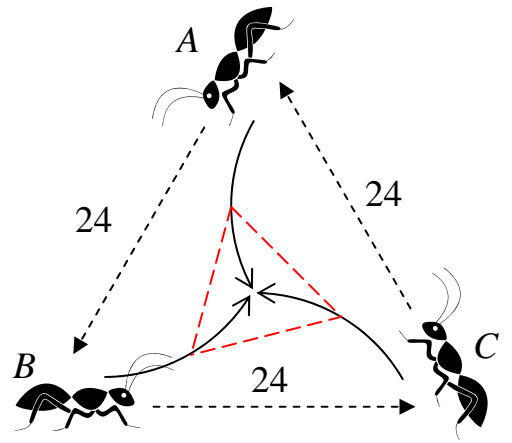
1. 開始時，共有 $(a_1, a_2), (a_3, a_4), \dots, (a_{63}, a_{64})$ 這 32 對通話，1 分鐘後，每一對裡的二個人都知道 2 條同樣的消息；
2. 接著 $(a_1, a_3), (a_2, a_4), \dots, (a_{61}, a_{63}), (a_{62}, a_{64})$ 這 32 對通話，1 分鐘後， $a_{4n+1}, a_{4n+2}, a_{4n+3}, a_{4n+4}$ 這四個人都知道 4 條同樣的消息；
3. 接著 $(a_1, a_5), (a_2, a_6), (a_3, a_7), (a_4, a_8), \dots, (a_{60}, a_{64})$ 這 32 對通話，1 分鐘後， $a_{8n+1}, a_{8n+2}, \dots, a_{8n+8}$ 這 8 個人都知道 8 條同樣的消息；
4. 接著 $(a_1, a_9), (a_2, a_{10}), (a_3, a_{11}), (a_4, a_{12}), (a_5, a_{13}), (a_6, a_{14}), (a_7, a_{15}), (a_8, a_{16}), \dots, (a_{56}, a_{64})$ 這 32 對通話，1 分鐘後， $a_{16n+1}, a_{16n+2}, \dots, a_{16n+16}$ 這 16 個人都知道 16 條同樣的消息；
5. 接著 $(a_1, a_{17}), (a_2, a_{18}), (a_3, a_{19}), (a_4, a_{20}), \dots, (a_{48}, a_{64})$ 這 32 對通話，1 分鐘後， $a_{32n+1}, a_{32n+2}, \dots, a_{32n+32}$ 這 32 個人都知道 32 條同樣的消息；
6. 最後 $(a_1, a_{33}), (a_2, a_{34}), (a_3, a_{35}), (a_4, a_{36}), \dots, (a_{32}, a_{64})$ 這 32 對通話，1 分鐘後，全部 64 個人都知道 64 條消息，此時合計經過了 6 分鐘。

答：6 分鐘

3. 有三隻螞蟻分別位於邊長為 24 cm 的正三角形之三個頂點，任何時刻，A 都保持與 B 行進方向夾 60° 的方向前進、B 都保持與 C 行進方向夾 60° 的方向前進、C 都保持與 A 行進方向夾 60° 的方向前進。若這三隻螞蟻都以相同的勻速爬行，它們的路徑成一螺旋線，且最後在正三角形的中心相遇。請問三隻螞蟻爬行的路徑總和是多少 cm？

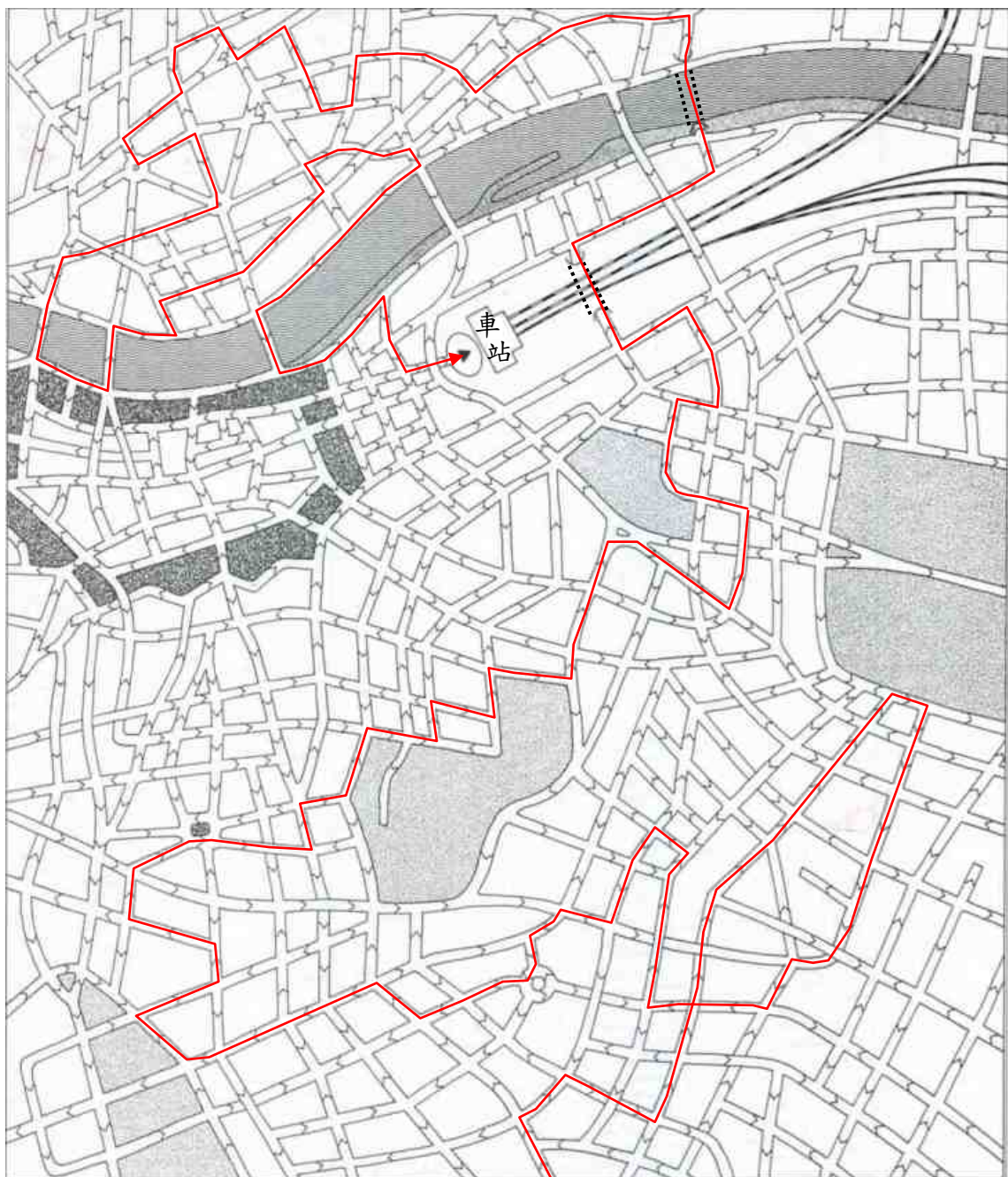
【參考解法】

可知這三隻螞蟻在相遇前所在位置都恰是一個正三角形的頂點；以 B 的觀點看， C 的水平分速為它的 $\frac{1}{2}$ 倍速度， B 與 C 一直以一隻螞蟻爬行勻速的 $\frac{3}{2}$ 倍互相靠近，而 B 與 C 原本相距 24 cm ，即 B 只需走 16 cm 即可與 C 相遇；同理， A 、 C 也都必須走 16 cm ，故合計共走 $16 \times 3 = 48\text{ cm}$ 。



答：48 cm

4. 一名遊客開車到了一個街道全部都是單行道的城市，遵行方向如路面上所標記之箭頭所示。請用色筆幫他劃一個不違反遵行方向規則而可到達車站的路線圖。(虛線部分表示隧道，遵行方向與進隧道前相同)



遊客現在位置