International Mathematics Tournament of Towns
環球城市數學競賽
2001 秋季賽　國中組　高級卷　27 Oct. 2001

※　**每題必須詳細寫下證明及理由，只寫答案不一定有分數。**

1. 設 a, b 爲正整數。用記號 $\gcd(a,b)$ 表示 a, b 的最大公因數。試問：是否存在 100 個正整數 $a_1 < a_2 < a_3 < \cdots < a_{100}$，使得 $\gcd(a_1, a_2) > \gcd(a_2, a_3) > \cdots > \gcd(a_{99}, a_{100})$？（四分）

2. 設 n 爲大於 2 的正整數。將一個圓用 $2n$ 個點分割爲 $2n$ 個圓弧，已知這些圓弧只有三種可能的長度，任二個相鄰的圓弧長度都不相同。試證：若將圓上這 $2n$ 個點依紅藍相間方式塗上顏色，則連接 n 個紅點所成的 n 邊形與連接 n 個藍點所成的 n 邊形有相同的周長與面積。(五分)

3. 設 n 爲大於 2 的正整數。如果一個矩形方格表或正方形方格表滿足下列條件：
 (1) 方格表中的每一個小方格都塡入 1, 2, 3, …, n 中的一個數；
 (2) 在每一列中，每個小方格中塡入的數都不相同；
 (3) 在每一行中，每個小方格中塡入的數都不相同，
 則我們稱這樣的方格表爲一個〝金方格表〞。試證：任意給定一個 $(n-2)\times n$ 的金方格表，一定可以在不改變原方格表的情況下，再加二列使其擴大成爲 $n\times n$ 的金方格表。（五分）

4. 設 n 爲大於 1 的正整數。在一個正 $(2n+1)$ 邊形上作 $(2n-2)$ 條對角線，這 $(2n-2)$ 條對角線彼此只能在正 $(2n+1)$ 邊形的頂點有交點，且這些對角線將此正 $(2n+1)$ 邊形剛好分割成 $(2n-1)$ 個三角形。試證：這 $(2n-1)$ 個三角形中至少有 3 個是等腰三角形。（五分）

5. 小文想在空的 8×8 方格棋盤內依下列規則放入一些西洋棋的〝城堡 (rooks)〞：
 (1) 一次只能在棋盤的空格內放一個城堡，第一個城堡可以放在任意的方格內；
 (2) 從第二個開始，每次當小文新放入一個城堡時，已放在棋盤上的城堡必須剛好有奇數個可以被這個新城堡攻擊。
 試問：依此規則下，小文最多可以放入多少個城堡？（註：兩城堡稱爲可以互相攻擊，是指這二個城堡在同一行或同一列且它們中間無其它棋子阻擋。）（六分）

6. 若數列中任意二個位置相鄰的數恆有右邊的數不小於左邊的數，則稱這個數列爲〝好數列〞。若有一個數列不是好數列，則小雄從這個數列中任意挑選位置相鄰且左邊大於右邊的二個數，分別將它們乘以 2，然後對調順序。試證：對於任何一個數列，無論小雄如何安排操作的順序，經過有限次上述的操作後，無法避免地，這個數列最後將變成好數列。（八分）

7. 已知 2^{333} 是個 101 位數，且它的首位數字是 1。試問：在 $2^1,\ 2^2,\ 2^3,\ \cdots,\ 2^{332}$ 這 332 個數中，有多少個數的首位數字是 4？（八分）

《成績是取最高得分三題的總和，考試時間五小時。》

International Mathematics Tournament of Towns

環球城市數學競賽

2001 秋季賽　高中組　高級卷　27 Oct. 2001

※　每題必須詳細寫下證明及理由，只寫答案不一定有分數。

1. 在平面上二個相異三角形，將其中一個三角形的三個頂點塗上紅色，另一個三角形的三個頂點塗上藍色。已知點 O 同時在此二個三角形的內部，且從 O 點到任一個紅色頂點的距離都小於從 O 點到任一個藍色頂點的距離。試問：有沒有可能這二個三角形的六個頂點共圓？（四分）

2. 設 a, b 爲正整數。用記號 $\operatorname{lcm}(a,b)$ 表示 a, b 的最小公倍數。試問：是否存在 100 個正整數 $a_1 < a_2 < a_3 < \cdots < a_{100}$，使得 $\operatorname{lcm}(a_1,a_2) > \operatorname{lcm}(a_2,a_3) > \cdots > \operatorname{lcm}(a_{99},a_{100})$？（五分）

3. 將數字 $1, 2, 3, \ldots, 64$ 塡入 8×8 的方格表中，每個小方格塡入一個數且每個小方格塡入的數都不相同。規定任意連續的二個數必須塡在相鄰的小方格中。試問：依此規定塡滿的方格表，其一條對角線上的數值總和最小是多少？（註：所謂相鄰的小方格是指兩個小方格恰有一個共同的邊。）（六分）

4. 設 F_1 爲任意一個凸四邊形。對於 $k \ge 2$，作以下之操作：將 F_{k-1} 沿其中一條對角線剪開成二片，然後把其中一片翻面，再將這二片沿著剪開的線對齊後黏接起來，得到一個新的凸四邊形 F_k。試問：在 $F_1, F_2, \cdots, F_k$ 中最多有多少種不全等的凸四邊形？（二個四邊形若可以將其中一片經平移、旋轉或翻面而與另一片完全疊合，則視爲二個四邊形全等；否則視爲不全等。）（六分）

5. 設 $a,\ d$ 爲正整數。如果對於任意正整數 n，都可以從 $a + nd$ 中的某一個數字或連續某幾個數字下劃底線，使得所劃的底線的數爲 n（例：$a = 5,\ d = 10$ 時。$\underline{1}5$, $\underline{2}5$, $\underline{3}5$, $\underline{4}5$, $\cdots$, $\underline{10}5$, $\underline{11}5, \cdots$）。試證：d 的值必須是 10 的次方。（七分）

6. 有 23 個盒子排成一列，首先在第一個盒子內放入 1 個球；第二個盒子內放入 2 個球；⋯；第二十三個盒子內放入 23 個球，然後再把這 23 個盒子任意調換順序。允許作以下的操作：若某個盒子中已有 n 個球，可以從比這個盒子內球數多的一個盒子中取出 n 個球加入此盒子，使此盒子之總球數爲 $2n$ 個。試問：無論這 23 個盒子開始的順序爲何，是否可以保證經過有限次上述的操作後，都能使左邊算起第一個盒子內有 1 個球；第二個盒子內有 2 個球；⋯；第二十三個盒子內有 23 個球？（七分）

7. 在直角坐標平面上有一個三角形 ABC，點 A, B, C 的坐標分別爲 (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)。已知對於任意不全爲 0 的整數 h 和 k，以坐標 $(x_1 + h, y_1 + k)$, $(x_2 + h, y_2 + k)$ 及 $(x_3 + h, y_3 + k)$ 爲頂點的三角形與三角形 ABC 沒有共同的內點。試問：

   (a) 三角形 ABC 之面積是否可能大於 $1/2$？（三分）

   (b)？ ▪ ▪ ▪ ABC ▪ ▪ 的 ▪ ▪ 值 ▪（六分）

《成績是取最高得分三題的總和，考試時間五小時。》