

International Mathematics Tournament of Towns

環球城市數學競賽

2001 春季賽 國中組 初級卷 11 Mar. 2001

※ 每題必須詳細寫下證明及理由，只寫答案不一定有分數。

1. 若自然數 n 可以表示為兩個自然數 a 與 b 的和 (即 $n = a + b$)，則可以將 n 用 a 和 b 的乘積替換。試問：可否依上述替換規則，由 22 開始經過有限次替換而得到 2001？(三分)
2. 三角形中若有兩個邊它們的中點連線之長度大於這個三角形的某一條中線之長度。試證：此三角形為鈍角三角形。(四分)
3. 某日有一家專售乳酪的公司有 20 公斤乳酪特價販售，限定每位顧客只能購買一次，顧客排隊爭相購買。試問下列情況是否可能發生：在最先購買的十位顧客中，每一位顧客買完乳酪後，售貨員都宣布『假如未來每一位顧客所購買的乳酪重量等於之前所有已購買的顧客所購買的乳酪平均重量，則現在剩下的乳酪剛好足夠賣給下 10 位顧客』？如果可能的話，當最先 10 位顧客都買完乳酪後，剩下的乳酪的重量為多少？(所有已購買乳酪的顧客所購買的平均重量是指將已販售的乳酪的總重量除以所有已購買乳酪的顧客人數)。(四分)
4. (a) 桌上任意放置 5 張全等的三角形紙片，可以將每一張紙片在桌面上朝任何方向平移，但是不可將它轉動。試問：是否任何一片三角形紙片都可以被其它的 4 片三角形紙片經由這種移動方式後完全覆蓋？(二分)
(b) 桌上任意放置 5 張全等的正三角形紙片，可以將每一張紙片在桌面上朝任何方向平移，但不可將它轉動。試證：任何一片正三角形紙片都可以被其它 4 片正三角形紙片經由這種移動方式後完全覆蓋？(三分)
5. 在 15×15 方格棋盤內放置 15 個西洋棋的“城堡 (rooks)”，這些“城堡”不能互相攻擊對方。若每一個“城堡”依照西洋棋“騎士 (knight)”的走法都各自移動一次，試證：當全部的“城堡”作完這個動作後，必定有兩個“城堡”可以互相攻擊。(註：“騎士”的一次走法是在棋盤方格內移動至橫二縱一或橫一縱二的位置；若兩“城堡”在同一行、同一列或同一個位置時，則稱它們可以互相攻擊對方。)(五分)

《成績是取最高分三題的總和，考試時間四小時。》

International Mathematics Tournament of Towns

環球城市數學競賽

2001 春季賽 高中組 初級卷 11 Mar. 2001

※ 每題必須詳細寫下證明及理由，只寫答案不一定有分數。

1. 有一輛汽車，在下午 1：20 開始要行駛 100 公里的路程，該汽車配備有一台正常運作的電腦，可用作預測還需多久的時間才能抵達目的地。試問下述的情況是否可能發生：在下午 2：00、3：00、4：00、5：00、6：00 和 7：00 的時候，電腦預測都顯示『假如這輛汽車此次行程所剩餘路程的平均速度和此次行程已經走過路程的平均速度一樣，則仍需 1 小時才能抵達目的地』？如果可能的話，那麼從下午 1：20 到下午 7：00，該汽車總共走了多少公里？(三分)
2. 所有的自然數都採用 10 進位法表示，已知一個自然數 a 是 n 位數，而 a^3 是 m 位數。試問： $n + m$ 的值是否可能等於 2001？(四分)
3. 在三角形 ABC 中， X 為 \overline{AB} 線段上的一點， Y 是 \overline{BC} 線段上的一點，並且 \overline{AY} 與 \overline{CX} 兩線段相交於點 Z 。若已知 $\overline{AY} = \overline{CY}$ ，且 $\overline{AB} = \overline{ZC}$ ，試證： B 、 X 、 Z 及 Y 四點共圓。(四分)
4. 甲乙二人在橫放的 3×100 方格棋盤上玩遊戲。這個遊戲的規則是：(1) 甲乙二人輪流在棋盤的空格上放置一個骨牌且由甲先開始放置。(2) 甲只能在棋盤上將骨牌橫放，乙只能在棋盤上將骨牌直放。照此規則玩下去，直到沒有空格可放置骨牌的一方算輸。試問：無論對手如何放置，甲乙二人之中是否有人一定會贏？如果是，有什麼必勝的策略？(註：所謂橫放是指骨牌較長的部份朝東西向放置，即 1×2 的骨牌；直放是指骨牌較長的部份朝南北向放置，即 2×1 的骨牌。)(五分)
5. 在一個稜長為 1 公分的正四面體的表面上任意塗上九個點，試證：這九個點中至少有二個點的距離不超過 0.5 公分。(註：二個點的距離是指它們空間的距離)(五分)

《成績是取最高分三題的總和，考試時間四小時。》