

International Mathematics Tournament of Towns

環球城市數學競賽

2001 春季賽 國中組 高級卷 18 Mar. 2001

※ 每題必須詳細寫下證明及理由，只寫答案不一定有分數。

1. 某公司有 10% 員工的薪水總額佔全公司薪水總額的 90%。這個公司有許多部門。請問下述情況是否可能發生：每一個部門中任意 10% 員工的薪水總額不超過此部門所有員工薪水總額的 11%？(三分)
2. 有三堆石子，每堆石子的總數分別為 51 顆、49 顆及 5 顆。每次操作我們都可以選擇以下的兩種方式之一：(1) 若某堆石子的總數為偶數時，可以將此堆石子分為數量相等的兩堆；或(2) 將任意兩堆石子合併為一堆。試問：經過有限次上述的操作能否將這三堆石子分成 105 堆，且每堆只有一顆石子？(五分)
3. 點 A 為 $\angle KMN$ 內部的一個點，有一束光線由 A 點射出後，先是碰到射線 MK 上的 B 點，經反射後再碰到射線 MN 上的 C 點，最後再經反射後回到 A 點(光線的反射都依照入射角等於反射角的規律)。試證： $\triangle BCM$ 的外接圓的圓心必落在直線 AM 上。(五分)
4. 一個凸多邊形上有一些對角線，這些對角線將此凸多邊形分割成為許多三角形，且這些對角線彼此只在凸多邊形的頂點有交點。我們在凸多邊形的每一個頂點寫上以這一個點為頂點的三角形個數。現將這個凸多邊形的所有對角線擦掉，是否能夠根據凸多邊形所有頂點上的數將原有的對角線重新劃出？(五分)
5. 在 8×8 的方格棋盤的兩個相異格子內放上一個黑色棋子與一個白色棋子，這兩個棋子共有 64×63 種不同的位置，已知每次可將一個棋子橫移或豎移至一個相鄰的空格上。試問：
 - (a) 有沒有可能在兩個棋子輪流移動一步的方式下，使得這兩個棋子剛好在棋盤上所有可能位置上出現一次？(三分)
 - (b) 如果兩個棋子不要求輪流只移動一步，而容許一個棋子移動若干步後再換另一個棋子移動若干步，有沒有可能使得這兩個棋子剛好在棋盤上所有可能位置上出現一次？(四分)
6. 令 \overline{AD} 、 \overline{BE} 及 \overline{CF} 分別為 $\triangle ABC$ 的三個高，點 K 、 M 及 N 分別為 $\triangle AEF$ 、 $\triangle BFD$ 及 $\triangle CDE$ 的垂心。試證： $\triangle KMN \cong \triangle DEF$ 。(七分)
7. 小華先從 10, 11, ..., 99 這些二位數中任意挑選一個數後，再由小明來猜這個數。若小明猜的數屬於下列三種情形之一：(i) 完全正確；(ii) 個位數是正確的，且十位數字相差為 1；(iii) 十位數是正確的，且個位數字相差為 1，則小華說“帥”，否則就說“遜”。(例如：小華所挑的數字為 65，若小明說出 65、55、75、64 或 66 之一，則小華說“帥”，否則小華就說“遜”。)
 - (a) 試證：在不超過 18 次猜測的限制下，小明沒有任何策略可以保證他能正確地推導出小華所挑選的數。(二分)
 - (b) 在不超過 24 次猜測的限制下，請幫小明找一種策略可以保證他能正確地推導出小華所挑選的數。(三分)
 - (c) 在不超過 22 次猜測的限制下，是否有一種策略可以保證小明能正確地推導出小華所挑選的數？(三分)

《成績是取最高分三題的總和，考試時間五小時。》

International Mathematics Tournament of Towns

環球城市數學競賽

2001 春季賽 高中組 高級卷

18 Mar. 2001

※ 每題必須詳細寫下證明及理由，只寫答案不一定有分數。

1. 請找一個 2001 次的多項式 $P(x)$ ，使得 $P(x) + P(1-x) = 1$ 對所有實數 x 恆成立。(三分)
2. 某次班上的慈善樂捐，林老師在結算時，發現在班上任意一群人數至少 5 人的學生中，總可以找到不超過 20% 的學生他們捐款總額至少佔這群學生中所有捐款總額的 80%。試證：班上有一位學生，他樂捐的錢至少佔全班捐款總額的 75%。(五分)
3. 令 \overline{AD} 、 \overline{BE} 及 \overline{CF} 分別為 $\triangle ABC$ 的三個高，點 K 、 M 及 N 分別為 $\triangle AEF$ 、 $\triangle BFD$ 及 $\triangle CDE$ 的垂心。試證： $\triangle KMN \cong \triangle DEF$ 。(五分)
4. 設 A 和 B 為兩個 $m \times n$ 的方格表。在 A 和 B 的每個方格內填上 0 或 1，使得每一列的數字從左到右都是遞增的，且每一行的數字從上到下也都是遞增的。已知方格表 A 和 B 中數字 1 的總數相同，在方格表 A 中由上到下的前 k 列中所有數字之和不小於方格表 B 中由上到下的前 k 列中所有數字之和，其中 $k = 1, 2, \dots, m$ 。試證：在方格表 B 中由左至右的前 i 行中所有數字之和不小於方格表 A 中由左至右的前 i 行中所有數字之和，其中 $i = 1, 2, \dots, n$ 。(五分)
5. 在象棋比賽中，每位選手都和其他參賽選手剛好比賽一場。在每一場比賽中，贏的人可以得到 2 分，輸的人得到 0 分，雙方平手則各得到 1 分。
 - (a) 下面的情形是否可能發生：對每一位選手，“贏他的所有選手的得分之總和”大於“輸給他的所有選手的得分之總和”？(四分)
 - (b) 下面的情形是否可能發生：對每一位選手，“輸給他的所有選手的得分之總和”大於“贏他的所有選手的得分之總和”？(四分)
6. 試證：存在有 2001 個凸多面體，在它們之中任意三個都沒有公共的交點；任意的兩個凸多面體都有公共的交點，這些交點都在凸多面體的表面上，但不在凸多面體的內部。(八分)
7. 將一些盒子排成一個圓圈，每個盒子內裝有若干個球（也有可能是空的）。我們作以下的操作：從某個裝有球的盒子內拿出所有的球，依順時針方向依序將球放入後面的盒子內，每一個盒子內只放入一顆球，直到放完為止。
 - (a) 如果每次操作完後，下一次的操作都從上一次操作的最後一顆球所放入的那個盒子開始，依此方法繼續操作下去。試證：經過有限次的操作後（至少一次），每一個盒子內的球數都與最初的球數相同。(四分)
 - (b) 下面敘述是否為真：“如果每次操作都可以選擇從任何一個有球的盒子開始，則無論最初盒子內的球怎樣分配，任何其他的分配都能出現”？(四分)

《成績是取最高分三題的總和，考試時間五小時。