

International Mathematics Tournament of Towns 環球城市數學競賽

2002 春季賽 國中組 高級卷 3 / 3 / 2002

※ 每題必須詳細寫下證明及理由，只寫答案不一定有分數。

1. 設 a, b, c 為三角形的三邊長。試證 $a^3 + b^3 + 3abc > c^3$ 。(四分)
2. 在一個 23×23 的方格棋盤上有黑、白棋子各兩個，其中兩個白色棋子分別放在左下角及右上角的小方格中，而兩個黑色棋子放在左上角及右下角的小方格中。遊戲開始時，甲持白棋，乙持黑棋，兩人輪流移動棋子，甲先移動棋子，在每次移動時每個人只能將自己的一個棋子移動至相鄰的空方格中。只有當兩個白色棋子移到相鄰的兩個小方格時，甲才算獲勝。試問乙是否能阻止甲在有限次移動後獲勝？(四分)
(註：二個相鄰的小方格是指它們有一個共同的邊。)
3. 設 $ABCD$ 為凸四邊形，點 E, F 分別是邊 \overline{BC} 、 \overline{CD} 的中點。若線段 \overline{AE} 、 \overline{AF} 及 \overline{EF} 將四邊形 $ABCD$ 分割成四個三角形，且這四個三角形的面積值構成四個連續的正整數。試求三角形 ABD 面積的最大值。(六分)
4. 將 n 盞燈排成一列，最初將其中某些燈點亮，在以後的每次操作，將那些在上一次未亮且其旁邊僅有一盞燈是亮著的燈點亮，同時將原來已亮著的燈熄滅。試問對什麼樣的 n ，可以找到一種亮燈的方式，使得無論操作幾次，在每一次操作後，至少都有一盞燈是亮著的。(七分)
5. 將一個銳角三角形用直線割成兩塊小多邊形，之後再隨便選取其中一塊用直線割成兩塊小多邊形，這樣一直做下去，即每一步都選擇一小塊多邊形，將它用直線再割成兩塊更小的多邊形。已知經過若干步後，原來的三角形可以被割成若干個小三角形。試問是否可能最後所有割成的小三角形全都是鈍角三角形？(七分)
6. 給定一個無限多項的正整數嚴格遞增數列，已知從第 2002 項開始的每一項都是前面所有各項總和的因數。試證：這個數列從某一項開始，每個項都等於前面所有各項的總和。(七分)
7. 多明諾骨牌是由二個單位正方形組成的 1×2 的長方形，每個單位正方形分別標有 0~6 個點，即 $\square\square, \square\cdot, \square\vdots, \dots, \square\vdots\vdots, \cdot\square, \cdot\vdots, \dots, \vdots\vdots\vdots$ ，一副多明諾骨牌共有 28 張不同的牌。將多明諾骨牌按“接龍規則”排成一列，進行如下操作：將一段頭尾點數相同的多明諾骨牌列取出，再將它整個倒置後，然後放入原來取出的位置。舉例來說，已知小華取出若干片的多明諾骨牌，按“接龍規則”排成一列，小明不小心把這列骨牌打亂了，又重新把這些骨牌按“接龍規則”排成另一列，但這二列最前端的一個小方格上的點數相同，且最末端的一個小方格上的點數也相同。試證：經過有限次上述操作後，小華必能將這列骨牌回復成之前所排成的那一列(八分)
(註：「接龍規則」是指：任意兩張相鄰的多明諾骨牌，它們相鄰的兩個單位正方形標有相同的數。)

《成績是取最高得分三題的總和，考試時間五小時。》

International Mathematics Tournament of Towns

環球城市數學競賽

2002 春季賽 高中組 高級卷 3 / 3 / 2002

※ 每題必須詳細寫下證明及理由，只寫答案不一定有分數。

1. 設三角形 ABC 的三個角的正切函數值 $\tan A$ 、 $\tan B$ 及 $\tan C$ 都是整數，試求出這三個整數值。(四分)
2. 試問能否在函數 $y = x^3$ 的圖形上取一點 A ，並在函數 $y = x^3 + |x| + 1$ 的圖形上取一點 B ，使得線段 \overline{AB} 的長度不超過 $\frac{1}{100}$ ？(四分)
3. 給定一個無限多項的正整數嚴格遞增數列，已知從第 2002 項開始的每一項都是前面所有各項總和的因數。試證：這個數列從某一項開始，每個項都等於前面所有各項的總和。(五分)
4. 有一團體買了一整排座位的電影票分給他們的成員一人一張票。他們進入電影院後，隨意坐滿在這排座位上。如果查票員可以讓都坐錯座位的兩位相鄰的觀眾互換位置，但不能讓坐對座位的觀眾換座位。已知這個團體的成員最初全都坐錯座位，未依照票號入座，試問查票員是否都能經過上述的換位方式，使他們都坐到正確的座位上？(五分)
5. 設線段 $\overline{AA_1}$ 、 $\overline{BB_1}$ 及 $\overline{CC_1}$ 是銳角三角形 ABC 的三個高，點 O_A 、 O_B 及 O_C 分別是三角形 AB_1C_1 、 BC_1A_1 及 CA_1B_1 的內心，又點 T_A 、 T_B 及 T_C 分別是三角形 ABC 的內切圓與三邊 \overline{BC} 、 \overline{CA} 及 \overline{AB} 的切點。試證：六邊形 $T_A O_C T_B O_A T_C O_B$ 的六個邊長都相等。(六分)
6. 將 52 張撲克牌排成 13×4 的陣列，已知在同一行或同一列中，任意相鄰的兩張紙牌不是花色相同就是點數一樣。試證：在同一行的 13 張紙牌其花色都相同。(七分)
7. 是否存在無理數 a 與 b ，使得 $a > 1$ ， $b > 1$ 且對於任意正整數 m 與 n ， $[a^m]$ 恆不等於 $[b^n]$ ？(八分)
(註：符號 $[x]$ 為不大於 x 的最大整數。)

《成績是取最高得分三題的總和，考試時間五小時。》