

# International Mathematics Tournament of Towns

## 環球城市數學競賽

2002 春季賽 國中組 初級卷 24 / 02 / 2002

※ 每題必須詳細寫下證明及理由，只寫答案不一定有分數。

1. 給很多張全等的長方形小紙板，其尺寸大小為  $a \times b$ ，其中  $a, b$  為正整數且  $a$  小於  $b$ 。已知用這些小紙板可以拼出尺寸大小為  $49 \times 51$  的長方形和尺寸大小為  $99 \times 101$  的長方形，這些紙片彼此互不重疊且長方形中間沒有空隙。試問：由上述的訊息，是否可以唯一確定  $a, b$  的值？（四分）
2. 試問：能否將任意一個三角形切割成四個凸多邊形，其中一個是三角形，一個是凸四邊形，一個是凸五邊形及一個是凸六邊形？（五分）  
（註：若一個多邊形內部中任意二點的連接線段全部都在此多邊形的內部，則稱此多邊形為凸多邊形。）
3. 設  $x$  及  $y$  為正整數，若將數  $x^2 + xy + y^2$  用十進制表示，其末位數字是 0。試證：這個數的末二位數字一定都是 0。（五分）
4. 四邊形  $ABCD$  的四個邊  $AB$ 、 $BC$ 、 $CD$  及  $DA$  分別外切圓  $O$  於點  $K$ 、 $L$ 、 $M$  及  $N$ 。令線段  $KM$  與  $LN$  的交點為  $S$ ，若  $S$ 、 $K$ 、 $B$  及  $L$  四點共圓。試證： $S$ 、 $N$ 、 $D$  及  $M$  四點共圓。（五分）
5. (a) 有二種不同重量的金幣共 128 枚，每一種各 64 枚。試問：如何使用沒有刻度的天平，在秤不超過 7 次的情形下，找出二枚不同重量的金幣？（三分）  
(b) 有二種不同重量的金幣共 8 枚，每一種各 4 枚。試問：如何使用沒有刻度的天平，在只秤 2 次的情形下，找出二枚不同重量的金幣？（三分）

《成績是取最高得分三題的總和，考試時間四小時。》

# International Mathematics Tournament of Towns

## 環球城市數學競賽

2002 春季賽 高中組 初級卷 24 / 02 2002

※ 每題必須詳細寫下證明及理由，只寫答案不一定有分數。

1. 設  $x$  及  $y$  為正整數，若將數  $x^2 + xy + y^2$  用十進制表示，其末位數字是 0。試證：這個數的末二位數字一定都是 0。（四分）
2. 剪下二個全等的三角形紙片  $ABC$  及  $A'B'C'$ ，先將它們其中的一片翻面，再將它們隨意放置在桌面上。試證：線段  $AA'$ 、 $BB'$  及  $CC'$  的三個中點共線。（五分）
3. 已知有六片重量都不相等的乳酪可以分為二堆，每堆各有三片且總重量相等。假設對於任何二片乳酪，我們都可以經由目測明顯地分辨出何者較重。試問：如何使用沒有刻度的天平只秤 2 次，就可以把這六片乳酪分為各有三片且總重量相等的二堆？（五分）
4. 在一個  $2 \times 50$  的長方形方格表中的 100 個小方格內，恰好不重複地填入 1 到 100 的整數，而且使得任意二個連續的整數一定是被填入相鄰的小方格內。試問：共有多少種不同的填法？（五分）  
（註：二個相鄰的小方格是指它們有一個共同的邊。）
5. 是否存在一個正三角柱，其表面可以被數個大小都不相同的正三角形不重疊地鋪滿？（六分）  
（註：允許這些正三角形在正三角柱的稜邊處可以沿稜邊彎曲。）

《成績是取最高得分三題的總和，考試時間四小時。》