# International Mathematics Tournament of Towns

# 環球城市數學競賽

## 2003 秋季賽　國中組高級卷　參考解答

1. **一個有 100 項的等差數列，它的每一項都是大於 1 的正整數。請問它們各項之間是否可能兩兩都互質？**
**（如果能，請將這個數列寫出；如果不能，請證明無論如何都不能達成。）**

**答：可能。我們構造這 100 項的等差數列如下：**
**令** $a_k = k \times 101! + 1$**，**$k = 1, 2, \ldots, 100$**，所以** $a_k > 1$ **且** $a_k$ **為正整數。由** $a_k - a_{k-1} = 101!$ **可知數列** $<a_k>$ **是一個公差為** 101! **的等差數列。**
**對任意** $1 \le i < j \le 100$**，令** $d_{ij}$ **為** $a_i$ **與** $a_j$ **之最大公因數，則由輾轉相除法得知**

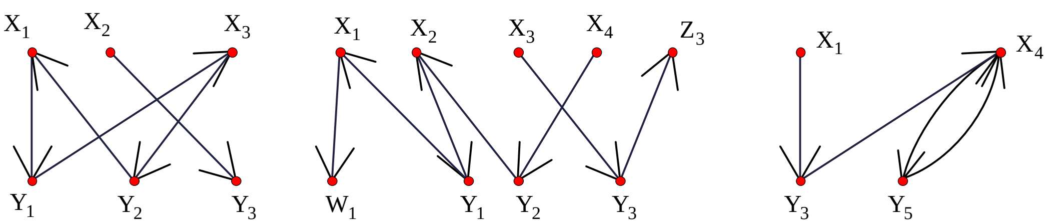
$$d_{ij} = \gcd(a_i, a_j) = \gcd(a_i, (j-i) \times 101!)\ ,\ d_{ij} \mid (j-i) \times 101!.$$

**若** $d_{ij}$ **有一個質因數** $p$**，則** $p \le 101$**，但是** $p \mid i \times 101! + 1$**，可見** $p$ **必須滿足** $p > 101$**，這導致矛盾，所以** $d_{ij}$ **沒有質因數，即** $d_{ij} = 1$**。我們所構造的等差數列它們各項之間都是兩兩互質的。**

2. **小鎮的居民有一些是未婚的男人與女人，他們之間有些人互相認識。兩位媒人知道哪些人互相認識，其中的一位媒人說：「我可以安排小鎮中所有褐髮的男人都娶小鎮中一位與他互相認識的女人。」另一位媒人說：「我可以安排小鎮中所有金髮的女人都嫁給小鎮中一位與她互相認識的男人。」一位業餘數學家從旁聽到這兩位媒人的談話後說：「我們可以同時安排這兩件事。」若只允許一夫一妻且這兩位媒人所說的都是真話，請問這位業餘數學家的話一定正確嗎？**

**答：這位業餘數學家的話是正確的。**
**考慮兩個族群：**(1) $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$**，表示所有褐髮的男子；**(2) $\{Y_1, Y_2, \ldots, Y_m\}$**，表示所有金髮女子。在每個媒人對他們之間所作的任何適當的配對，我們在代表配對的兩點間劃上一道弧。**

**對** $X_k$ **而言, 如果他所配對的不是金髮女子, 則我們以** $W_k$ **來表示與他配對的女子；對** $Y_k$ **而言, 如果她所配對的不是褐髮男子, 則我們以** $Z_k$ **來表示與她配對的男子。顯然, 對於這兩個媒人的安排, 有些弧會構成一個循環, 有些則是形成一個路徑。**




循環　　　路徑—奇　　　路徑—偶

對一個循環而言，所有在這個循環上的點都將是 X 族及 Y 族的點，因為對於 W 族及 Z 族的點, 他們是被動的被配對者, 不是主動去與褐髮男子或金髮女子配對。由於每一個循環中的弧交錯連結著 X 族及 Y 族的點, 因此弧數為偶數。業餘數學家可以沿著循環中交錯的弧來安排褐髮男子與金髮女子的婚姻。
對一個路徑而言，除了端點以外，在這個路徑上的點也都是 X 族及 Y 族的點，所以業餘數學家可以沿著路徑開始的弧來安排男子與女子的婚姻。
如果路徑的弧數為偶數，則仍屬於安排褐髮男子與金髮女子的婚姻這種情形。
如果路徑的弧數為奇數，除了路徑結束的最後一道弧，仍屬於安排褐髮男子與金髮女子的婚姻。

所以，在任何情況，所有褐髮的男子與所有金髮女子都可以被安排與他相互認識的異性結婚。

3. 請找出所有正整數 $k$，使得存在有正整數 $m$ 與 $n$，滿足 $m(m+k)=n(n+1)$。

答：將 $m(m+k)=n(n+1)$同乘以 4，重新整理得 $(2m+k)^2-(2n+1)^2=k^2-1$。
(1) 若 $k$ 是奇數，我們可以令 $2m+k+2n+1=(k-1)/2$，且 $2m+k-2n-1=2$，
得 $m=\dfrac{(k-2)^2-1}{8}$，$n=\dfrac{k^2-1}{8}-1$。
因為對奇數 $x$ 而言，$x^2\equiv 1 \pmod 8$，所以 $m$，$n$ 都是整數。當 $k>5$，$m$ 與 $n$ 均為正的。
當 $k=3$ 時，我們有 $(2m+3)^2-(2n+1)^2=8$，這時只有當兩個平方數分別是 9 和 1 時，它們的差才會是 8，即 $m=n=0$。
(2) 若 $k$ 是偶數，我們可以令 $2m+k+2n+1=k^2-1$，且 $2m+k-2n-1=1$，可得
$m=\dfrac{k^2}{4}-\dfrac{k}{2}$，$n=\dfrac{k^2}{4}-1$。
$m$，$n$ 也都是整數。當 $k\ge 4$ 時，$m$ 與 $n$ 才為正的。
當 $k=2$ 時，我們有 $(2m+2)^2-(2n+1)^2=3$，這時只有當兩個平方數分別是 4 和 1 時，它們的差才會是 3，即 $m=n=0$。

由 (1) 與 (2) 可知，只有當 $k\ge 4$ 時，正整數 $m$ 與 $n$ 才會存在。

4. 將 $15\times 15$ 的方格表中的某些小方格塗上顏色，使得把西洋棋的主教(Bishop)放在方格表上的任一個小方格上，它都至少可以攻擊二個塗有顏色的小方格。要滿足上述要求，請問在 $15\times 15$ 的方格表上至少要將多少個小方格塗上顏色？
（註：西洋棋的主教可以攻擊本身所在的小方格及它的東南、東北、西南、西北方向上的任何小方格）

答：在 $15\times 15$ 的方格表上至少要將 28 個小方格塗上顏色。
將 $15\times 15$ 的方格表採黑白相間的方式塗色，使角落的方格位置上塗上黑色。如下面左圖，在 14 個黑色方格標上黑色實心圓。因為題設定義西洋棋的主教可以

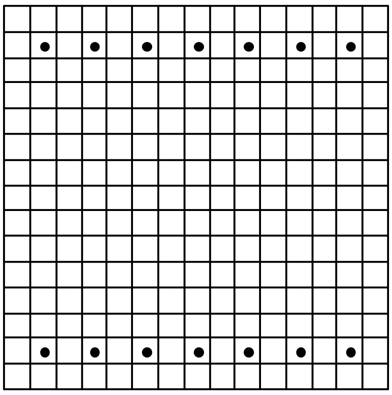
攻擊本身所在的小方格及它的東南、東北、西南、西北方向上的任何小方格，所以很容易可得知，任何一個放在塗黑色方格的主教(除了方格表的四個角以外)都至少可以攻擊二個標上黑色實心圓的小方格；主教放在方格表的四個角上，可攻擊本身所在方格及一個標上黑色實心圓的小方格。

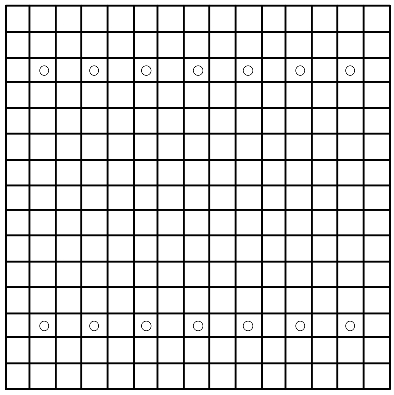
下面證明 14 是最佳化的：

考慮沿方格表外圈邊上的 28 個黑色方格，這每一個方格都可以攻擊本身所在方格及至少一個標定黑色實心圓的黑色方格；而任何黑色方格至多可被邊線上二個黑色方格攻擊。

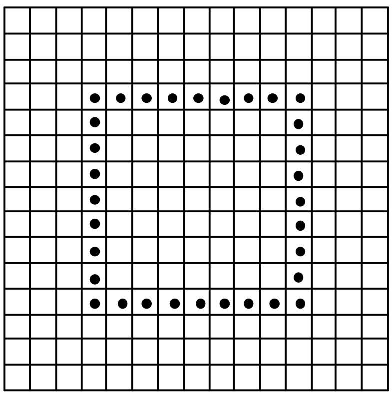
同理，如下面右圖，在 14 個白色方格標上白色實心圓。如同對黑色方格的論述，這 14 個白色方格也是充要的。

所以，在 $15\times 15$ 的方格表上至少要將 28 個小方格塗上顏色，才能使放在方格表任一個小方格上的主教都至少可以攻擊二個塗有顏色的小方格。



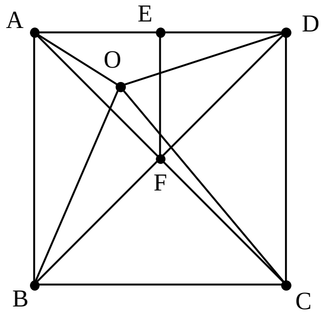


另外塗法：



5. 點 $O$ 為正方形 $ABCD$ 內部的一點。試證：$\angle OAB$，$\angle OBC$，$\angle OCD$，$\angle ODA$ 四個角之和與 $180°$之差不大於 $45°$。

答：令點 $E$ 是 $AD$ 邊的中點，點 $F$ 是正方形 $ABCD$ 的中心點。不失一般性，我們假設 $O$ 點落在三角形 $AEF$ 的內部，因此 $OA\le OD$ 且 $OB\le OC$，$\angle ODA\le\angle OAD$ 且 $\angle OCB\le\angle OBC$。



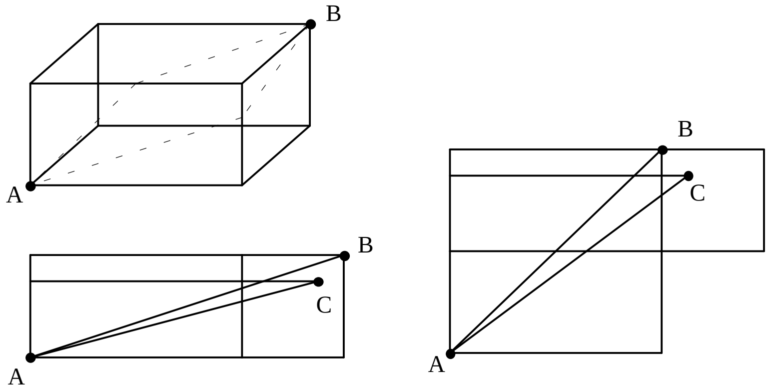

由　$90° = \angle OAB + \angle OAD \geq \angle OAB + \angle ODA \geq \angle OAB \geq 45°$，$90° + 45° \geq \angle OBC + \angle OCD \geq \angle OCB + \angle OCD = 90°$。

所以　$225° \geq \angle OAB + \angle OBC + \angle OCD + \angle ODA \geq 135°$，

即　$\angle OAB$，$\angle OBC$，$\angle OCD$ 與 $\angle ODA$ 這四個角之和與 $180°$之差不大於 $45°$。

6. 一隻螞蟻爬行於一個長方體紙盒的表面。此盒子表面上任兩點的距離是指螞蟻爬行此兩點間的最短路程的長度。請問以螞蟻之觀點，此盒子表面上距離最遠的兩個點是否為盒子的一個頂點及其斜對面的頂點？
（註：此兩點對稱於長方體的中心）

答：在這個距離定義下，答案是否定的。假設點 $A$ 與 $B$ 在 $4\times4\times8$ 長方體紙盒的相對頂點的位置，點 $C$ 在以 $B$ 為其中一個頂點的 $4\times4$ 的稜面上，且 $C$ 點到包含 $B$ 點的兩稜邊的距離均為 1。如下面兩種展開方式，我們考慮 $A$ 到 $B$ 是否為盒子表面上最遠距離。




在左邊這個圖，$AB=\sqrt{12^2+4^2}=\sqrt{160}$，$AC=\sqrt{11^2+3^2}=\sqrt{130}$；在右邊這個圖，$AB=\sqrt{8^2+8^2}=\sqrt{128}$，$AC=\sqrt{9^2+7^2}=\sqrt{130}$。其他剩下的展開方式都不比這兩種所得 $AB$ 與 $AC$ 還長。根據定義：盒子表面上任兩點的距離是指螞蟻爬行此兩點間的最短路程的長度。所以，$A$ 到 $B$ 的距離是 $\sqrt{128}$，而 $A$ 到 $C$ 的距離是 $\sqrt{130}$。顯然，$C$ 距離 $A$ 比 $B$ 距離 $A$ 來得遠。

7. <u>小王</u>和<u>小丁</u>玩以下的遊戲：<u>小王</u>手中握有 1000 張分別寫有偶數 2，4，6，…，2000 的紙牌，<u>小丁</u>手中握有 1001 張分別寫有奇數 1，3，5，…，2001 的紙牌；由<u>小</u>

王開始，先拿出一張牌放在桌上，小丁看了小王出的牌之後，相應地也拿出一張牌放在桌上，然後比較牌上的數，較大者得 1 分，較小者得 0 分，放在桌上的牌不得再使用。接著換小丁先出牌，小王看了小丁出的牌之後再出牌。兩人輪流依此規則繼續玩下去，直到小王手上沒有牌，小丁手上剩下一張牌為止。請問無論對手如何出牌，小王和小丁各可以保證至少得到多少分？

答：我們先以 5 張牌來考慮這個遊戲。假設小王手邊的牌為 2，4；小丁的牌是 1，3，5。由小王開始，如果小王先出 2，則小丁可以依序出 3 與 5 來贏得這兩輪。如果小王出 4，則小丁可以依序出 5 與 3 來贏得這兩輪。
利用歸納法來證，對於 $4n+1$ 張牌，小王可以保證贏得 $n-1$ 回，小丁可以保證贏得 $n+1$ 回。
對小王而言，最佳策略是在第一輪先出 2 這張牌，如果小丁要贏這一輪，他至少是出 3 這張牌。因為在 2 這一張排打出後，牌 1 和 3 是等價的，沒有理由他會出牌 1 以致於失去這一局。因此我們可以假設小丁在第一輪出 3 來取分。
接著下一輪由小丁先出牌，如果小丁不是出 $4n+1$ 這張牌，則小王都可以從比小丁的牌來的大的一堆牌中，取出最小的一張來贏得這一分。
在這個觀點下，剩下的 $4n-3$ 張牌仍可視為新的遊戲開始，我們可以考慮它們是 1　$4n-3$ 這些牌。
假設小丁在第二輪是打出 $4n+1$ 這張牌，則小王對應給出的牌應該是 4，但是在下一輪(第三輪)，小王就可以先出 $4n$ 這張牌來贏得該輪，這時小丁出 1 或 5 這兩張牌的一張。
在接下來的任何一輪，輪到小丁先出牌的時候，如果小丁不是打出最大牌，小王都可以贏得該輪；如果小丁都是打出最大牌，則小王只能如上面方式，出最小的牌，在下一輪才得分。
所以，小王將在第一輪與最後一輪失分，他只有在每個第二輪才能得分。所以他贏得 $n-1$ 回。
小丁最簡單的策略是取那些比小王所出的牌來得大的最小的那一張牌來贏得第一輪，把 1 留在第二輪。
由歸納法可知，對於 $4n+1$ 張牌，小王可以保證贏得 $n-1$ 回，小丁可以保證贏得 $n+1$ 回。

International Mathematics Tournament of Towns

# 環球城市數學競賽

## 2003 秋季賽　 高中組高級卷　參考解答

1. **小鎮的居民有一些是未婚的男人與女人，他們之間有些人互相認識。兩位媒人知道哪些人互相認識，其中的一位媒人說：「我可以安排小鎮中所有褐髮的男人都娶小鎮中一位與他互相認識的女人。」另一位媒人說：「我可以安排小鎮中所有金髮的女人都嫁給小鎮中一位與她互相認識的男人。」一位業餘數學家從旁聽到這兩位媒人的談話後說：「我們可以同時安排這兩件事。」若只允許一夫一妻且這兩位媒人所說的都是真話，請問這位業餘數學家的話正確嗎？**

   **答：詳見國中高級卷第二題。**

2. **試證：任意正整數都可以用**$3^{u_1}2^{v_1}+3^{u_2}2^{v_2}+\cdots+3^{u_k}2^{v_k}$**的形式表示之，其中** $u_1,u_2,\ldots,u_k,v_1,v_2,\ldots,v_k$ **為整數且**$u_1>u_2>\cdots>u_k\geq 0$，$0\leq v_1<v_2<\cdots<v_k$。

   **答：利用數學歸納法，對** $n=1$ **時，**$n=1=3^0 2^0$**，命題成立。**

   **設對任意偶的整數** $n\geq 2$，$\frac{n}{2}$**有如下的表示法：**$3^{u_1}2^{v_1}+3^{u_2}2^{v_2}+\cdots+3^{u_k}2^{v_k}$。**所以，** $n=3^{u_1}2^{v_1+1}+3^{u_2}2^{v_2+1}+\cdots+3^{u_k}2^{v_k+1}$。

   **對任意奇的整數** $n\geq 3$，**令** $t$ **是滿足**$3^{t+1}>n\geq 3^t$**的唯一整數。如果** $n=3^t$**，則它有一個表示法** $3^t 2^0$**，否則，由**$n-3^t$**是一個偶數，**$v_1>0$ **可知，** $n-3^t$**有一個表示法** $3^{u_1}2^{v_1}+3^{u_2}2^{v_2}+\cdots+3^{u_k}2^{v_k}$**，則**

   $$n=3^t 2^0+3^{u_1}2^{v_1}+3^{u_2}2^{v_2}+\cdots+3^{u_k}2^{v_k}。$$

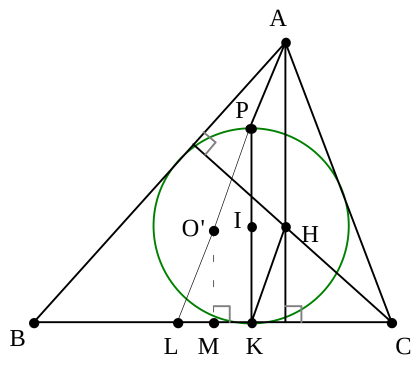
   **又**$3^{t+1}>n\geq 3^t+3^{u_1}2^{v_1}\geq 3^t+2\cdot 3^{u_1}$**，因此** $2\cdot 3^t>2\cdot 3^{u_1}$，$t>u_1$。**此即，**
   **任意正整數都可以用**$3^{u_1}2^{v_1}+3^{u_2}2^{v_2}+\cdots+3^{u_k}2^{v_k}$**的形式表示之。**

3. **一隻螞蟻爬行於一個長方體紙盒的表面。此盒子表面上任兩點的距離是指螞蟻爬行此兩點間的最短路程的長度。請問以螞蟻之觀點，此盒子表面上距離最遠的兩個點是否為盒子的一個頂點及其斜對面的頂點？**
   **（註：此兩點對稱於長方體的中心）**

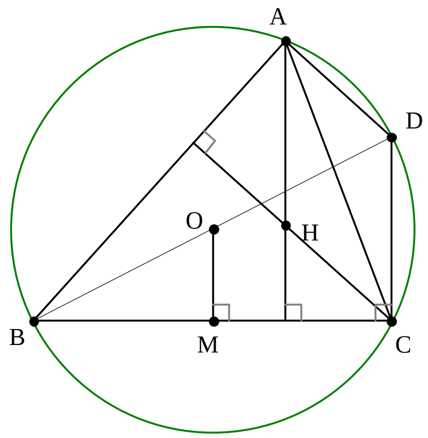
   **答：詳見國中高級卷第六題。**

4. **三角形** $ABC$ **中，點** $H$ **為其三高之交點，點** $I$ **為其內切圓之圓心，點** $O$ **為其外接圓之圓心，點** $K$ **為其內切圓與** $BC$ **邊之切點。若** $IO\,//\,BC$**，試證：**$AO\,//\,HK$。

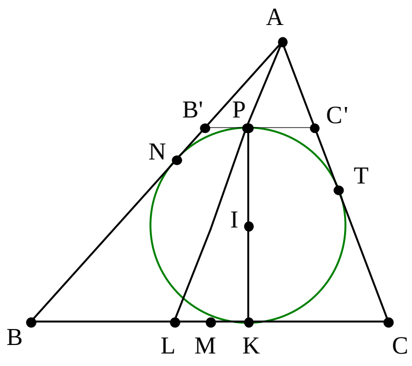
   **答：如圖一，作內切圓直徑** $KP$**，延長** $AP$ **交** $BC$ **邊於** $L$ **過** $BC$ **中點** $M$ **作垂線交** $AL$ **於** $O'$ **點。**




圖一




圖二




圖三

(1) **先證：四邊形** $APKH$ **為平行四邊形。**

(a) $\triangle ABC$ **中，**$H$ **為垂心，**$O$ **為外心，**$M$ **為** $BC$ **中點，則** $AH = 2OM$ (**如圖二**)**，因** $OM = 1/2\ CD$**，又四邊形** $AHCD$ **為平行四邊形，所以** $OM = 1/2\ CD = 1/2\ AH$**，即** $AH = 2OM$.

(b) $PK$ (**直徑**) $= 2IK = 2OM = AH$**，即** $PK \,//\, AH$**，**$PK = AH$**，故四邊形** $APKH$ **為平行四邊形。於是得** $AP \,//\, HK$ ………… (*)

(2) **次證：**$O' = O$ (**重心**)**。**

(a) **證明：**$BC$ **之中點** $M = LK$ **之中點** ( IMO **試題**)

**如圖三，過** $P$ **點作** $B'C'$**直線平行於** $BC$ **邊，且交** $AB$ **於** $B'$**，交** $AC$ **於** $C'$**。**$N$**、**$T$ **分別為內切圓切** $AB$**、**$AC$ **邊的切點。**

**所以** $AN = AT$**，**$AB' + B'P = AC' + C'P$ ………… (1)

**因為** $\triangle AB'C'$　　$\triangle ABC$**，**$\triangle AB'P$　　$\triangle ABL$**，**$\triangle AC'P$　　$\triangle ACL$.

**故** $$\frac{BL}{B'P} = \frac{AB}{AB'} = \frac{AC}{AC'} = \frac{CL}{C'P} = r$$

**即**　$BL = (B'P)\ r$**，**$AB = (AB')\ r$**，**$AC = (AC')\ r$**，**$CL = (C'P)\ r$ ………… (2)

**將**(2)**代入**(1)**得到**

$$AB + BL = AC + CL \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

**又** $AN = AT$**，故** (3) **式變成**

$$\begin{aligned} & NB + BL = TC + CL \\ \Rightarrow\ & BK + (BM - LM) = CK + (CM + LM) \\ \Rightarrow\ & (BM + MK) + (BM - LM) = (CM - MK) + (CM + LM) \\ \Rightarrow\ & MK - LM = LM - MK \qquad (\because BM = CM) \\ \Rightarrow\ & LM = MK. \end{aligned}$$

**所以** $M$ **為** $LK$ **之中點。**

(b) **證明：**$O' = O$ (**重心**)**。**

**參照圖一，**$M$ **為** $LK$ **之中點，且** $MO' \,//\, PK$**，故** $O'M = 1/2\ PK$ **，即** $O'M = IK$**。**

**又已知** $OM = IK$ **且** $O$ **在直線** $O'M$**，故** $O' = O$ **是重心。**

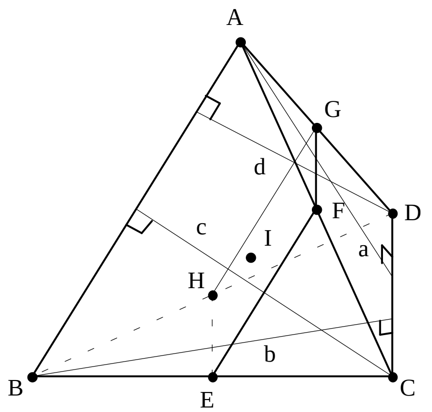
$A$**、**$P$**、**$O$ **共線，再由** (*)　$AP \,//\, HK$　**得** $AO \,//\, HK$.

5. **小王和小丁玩以下的遊戲：小王手中握有 1000 張分別寫有偶數 2，4，6，⋯，2000 的紙牌，小丁手中握有 1001 張分別寫有奇數 1，3，5，⋯，2001 的紙牌；由小王開始，先拿出一張牌放在桌上，小丁看了小王出的牌之後，相應地也拿出一張牌放在桌上，然後比較牌上的數，較大者得 1 分，較小者得 0 分，放在桌上的牌不得再使用。接著換小丁先出牌，小王看了小丁出的牌之後再出牌。兩人輪流依此規則繼續玩下去，直到小王手上沒有牌，小丁手上剩下一張牌為止。請問無論對手如何出牌，小王和小丁各可以保證至少得到多少分？**

**答：詳見國中高級卷第七題。**

6. **四面體** $ABCD$ **中，**$\triangle ABC$ **與**$\triangle ABD$ **之面積和等於**$\triangle CDA$ **與**$\triangle CDB$ **之面積和。設與四面體** $ABCD$ **的四個表面都相切的內切球球心為點** $O$**。試證：**$BC$**、**$AD$**、**$AC$**、**$BD$ **之中點都在同一平面上，並且此平面亦包含點** $O$**。**

**答：令** [P] **表示多邊形** P **的面積值。**
**由已知條件** $[ABC] + [ABD] = [ACD] + [BCD]$**。假設這個面積和之值為** $S$**，四面體** $ABCD$ **之體積值為** $V$**，內切球半徑為** $r$**，則**
$V = r \times ([ABC] + [ABD] + [BCD] + [ACD]) / 3 = 2rS / 3 \Rightarrow r = 3V / 2S$。
**若** $E$**、**$F$**、**$G$**、**$H$ **分別為** $BC$**、**$AC$**、**$AD$ **及** $BD$ **邊上的中點，且** $a$**、**$b$**、**$c$ **及** $d$ **分別是**$\triangle ACD$ **之** $CD$ **邊上的高、**$\triangle BCD$ **之** $CD$ **邊上的高、**$\triangle ABC$ **之** $AB$ **邊上的高及**$\triangle ABD$ **之** $AB$ **邊上的高，則** $S = [ABC] + [ABD] = AB \times (c + d) / 2 \Rightarrow 2S = AB \times (c + d)$.
**同理，有** $2S = CD \times (a + b)$.




**因為** $EF$ **與** $GH \mathbin{/\!/} AB$**，**$EH$ **與** $FG \mathbin{/\!/} CD$**，所以** $EFGH$ **是一個平行四邊形。先在** $EF$ **與** $GH$ **之間劃一條平行於它們的直線，使得它與** $EF$ **及** $GH$ **之距離比為** $c : d$**，再由** $EH$ **與** $FG$ **之間劃一條平行於它們的直線，使得它與** $EH$ **及** $FG$ **之距離比為** $b : a$**，設這兩條直線之交點為** $I$**。**
**因為** $D$ **到**$\triangle ABC$ **之高為** $3V / [ABC]$**，則從** $G$ **或** $H$ **到**$\triangle ABC$ **之高為** $3V / (AB \times c)$**，而且** $I$ **到**$\triangle ABC$ **之距離為** $(3V / (AB \times c)) \times (c / (c + d)) = 3V / 2S$.
**同理，點** $I$ **到**$\triangle ABD$**、**$\triangle ACD$ **及**$\triangle BCD$ **之距離也等於** $3V / 2S$**。**

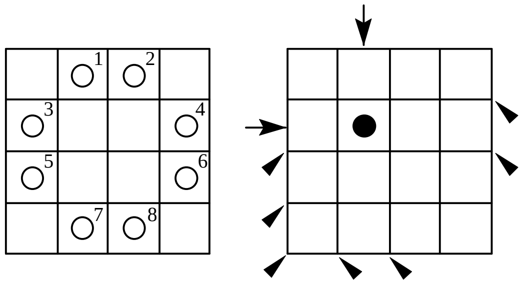
此即點 $I$ 到四面體的四個面等距，$I = O$，為四面體內切球之球心；$O$ 點確實與點 $E$、$F$、$G$ 及 $H$ 都共平面。

7. 在 $m \times n$ 的方格表的每個小方格內任意選擇一個 “ + ” 號或 “ – ” 號填入。
   (a) 每次操作可以將同一行或同一列上小方格內的記號由 “ + ” 號改變為 “ – ” 號或由 “ – ” 號改變為 “ + ” 號。若無論如何操作都無法將一個方格表上的記號全部變為 “ + ” 號，則稱此方格表為 “ 不可化簡 ” 的方格表。試證：在每一個 “ 不可化簡 ” 的方格表中必定包含有一個 “ 不可化簡 ” 的 $2 \times 2$ 的小方格表。
   (b) 每次操作可以將同一行、同一列或同一斜線上的所有小方格內的記號由 “ + ” 號改變為 “ – ” 號或由 “ – ” 號改變為 “ + ” 號。若無論如何操作都無法將一個方格表上的記號全部變為 “ + ” 號，則稱此方格表為 “ 不可化簡 ” 的方格表。試證：在每一個 “ 不可化簡 ” 的方格表中必定包含有一個 “ 不可化簡 ” 的 $4 \times 4$ 的小方格表。

   （註：所謂在同一斜線上的所有小方格是指方格表中的某一個小方格及其東南與西北（或東北與西南）方向的所有小方格；因此，四個角落的小方格每個都可單獨視為在同一斜線上的所有小方格。）

   答：(a) 一個 $2 \times 2$ 的小方格表是 “ 不可化簡 ” 的，若且唯若它包含有奇數個 “ – ” 號。很容易可以證得，當 “ – ” 號的個數是偶數時，它們都可以在被操作後變成 “ + ” 號。然而，這個操作不能改變 “ – ” 號數目的奇偶性，所以，一個有奇數個 “ – ” 號的 $2 \times 2$ 小方格表是 “ 不可化簡 ” 的。
   如果在一個 $m \times n$ 的方格表內包含一個 “ 不可化簡 ” 的 $2 \times 2$ 小方格表，顯然它仍是一個 “ 不可化簡 ” 的方格表，因為我們無法將小方格表內的 “ – ” 號全數變成 “ + ” 號。
   假設在一個 $m \times n$ 的方格表內沒有 “ 不可化簡 ” 的 $2 \times 2$ 小方格表，則我們可以在允許的操作下將第一列全部變成 “ + ” 號。這時，我們宣稱第二列將都是 “ – ” 號或 “ + ” 號；否則，該列會有一個標示 “ – ” 號的方格，它的相鄰方格是 “ + ” 號，與它們相鄰的第一列的兩個方格都是 “ + ” 號，這 4 個方格組成一個 $2 \times 2$ 的 “ 不可化簡 ” 的小方格表。如果需要，我們可以對第二列操作使得它變成整列都是 “ + ” 號。同樣的方法，我們可以對剩下的列作用，證明一個沒有 “ 不可化簡 ” 的小方格表的 $m \times n$ 方格表是 “ 可化簡 ” 的。

   (b) 首先，我們宣稱「一個 $4 \times 4$ 的小方格表是 “ 不可化簡 ” 的，若且唯若在它最外一層鄰邊的八個小方格中(不含 $4 \times 4$ 方格表四個角的四個方格)包含有奇數個 “ – ” 號」。如下面圖示，我們在這八個小方格中標上空心圓圈。因為在允許的操作下，每一次操作都改變這些方格中的偶數個方格的符號，所以每一次操作並不影響它們 “ – ” 號數目的奇偶性。因此，這樣的一個 $4 \times 4$ 的小方格表是 “ 不可化簡 ” 的。
   如果一個 $m \times n$ 的方格表內含有 “ 不可化簡 ” 的 $4 \times 4$ 小方格表，顯然它是 “ 不可化簡 ” 的，因為對這個 $m \times n$ 的方格表的這一個 $4 \times 4$ 小方格表，我們無法將內的 “ – ” 號全數變成 “ + ” 號。




假設一個 $4\times4$ 的方格表的上述八個方格中有偶數個“ + ”號。首先，在允許的操作下每次對每一行操作，我們可將編號 1、2、3 及 4 的方格都變成“ + ”號。如果這時第三列的方格 5 與 6 也是同符號，我們同樣可以在允許的操作下對這一列操作，使它們都變成“ + ”號。因此最後一列的方格 7 與 8 也必定同號，可以變成“ + ”號；如果這時第三列的方格 5 與 6 是異號，則最後一列的方格 7 與 8 也必定異號，它們可以借助操作含編號 5 及 7，或編號 6 及 8 的對角線，或第三列來變成“ + ”號。
上面右圖表示，我們可以借助箭頭所指的方向，沿行、列或對角線，對這一個方格操作 9 次，使得黑色圓圈所標示的方格從“ – ”號變成“ + ”號而不影響其他方格內的符號。最後，方格表的四個角的位置，可以被獨立操作為“ + ”號(採對角線方式操作)。
因此，這就證明了：一個 $4\times4$ 的小方格表是“ 不可化簡 ”的，若且唯若在它最外一層鄰邊的八個小方格中包含有奇數個“ – ”號。

假設一個 $m\times n$ 的方格表內沒有“ 不可化簡 ”的小方格表，我們可以如下所述的方式將最上面的三列都變成“ + ”號：從左至右逐行地運用“ 行 ”操作將第二列的方格變“ + ”號；對第一列運用“ 左下或右下 ”的對角線操作；對第三列運用“ 左上或右上 ”的對角線操作，我們可以將它們也都變成“ + ”號。對第四列而言，除了該列第一個方格與最後一個方格以外，其他方格應該都是同號的(同為“ + ”或“ – ”號)，否則這個方格表必定含有“ 不可化簡 ”的 $4\times4$ 小方格表。因此，運用“ 列 ”操作，我們可以輕易地將該列變成“ + ”號(頭、尾兩個方格都可以在不影響其他方格下運用“ 對角線 ”變換變成“ + ”號)。在這個方式之下，我們可以同時將方格表的下一列都變成“ + ”號，進而使得所有方格都是“ + ”號。