International Mathematics Tournament of Towns

環球城市數學競賽

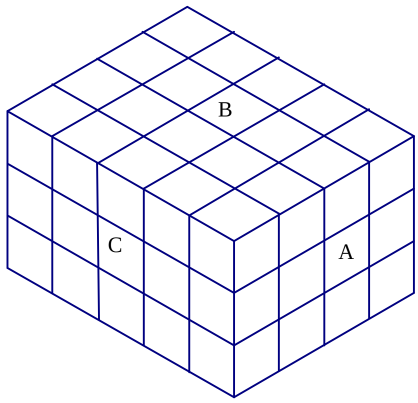
2003 秋季賽　國中組初級卷　參考解答

1. **將一個$3\times4\times5$的長方體紙盒的所有表面劃分為1×1的單位正方形。是否能在這個長方體紙盒表面上的每一小方格內填上一個數字，使得當使用一條寬度為 1 的彩帶將紙盒繞一圈(彩帶必須垂直紙盒的稜邊且對準方格，不可以斜繞)後，遮住的數字總和都是 120 嗎？(如果能，請將每個方格上的數字填出；如果不能，請證明無論怎麼填，都不能達成。)**

答：能。

A **面及其對面的格子每格都填** 5。B **面及其對面的格子每格都填** 9。C **面及其對面的格子每格都填** 8。

將紙盒繞一圈的彩帶都遮住 120。**紙帶繞經** A、B **面，則遮住** $3\times5\times2+5\times9\times2=120$；**繞經** A、C **面，則遮住** $4\times5\times2+5\times8\times2=120$；**繞經** B、C **面，則遮住** $4\times9\times2+3\times8\times2=120$。

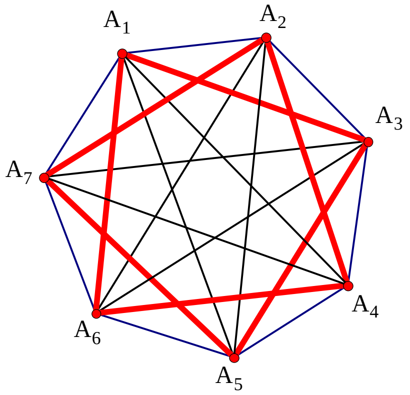


另解：

							0	0	0				
							0	0	0				
							0	0	0				
							0	0	0				
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	120	0
0	0	0	0	0	0	0	120	0	0	0	0	0	0
120	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	120	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	120	0	0	0	0	0	0	0
							0	0	0				
							0	0	0				
							0	0	0				
							0	120	0				

2. **已知$A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$是一個七邊形，其中七條對角線A_1A_3、A_2A_4、A_3A_5、A_4A_6、A_5A_7、A_6A_1及A_7A_2的長度彼此相等；而另外七條對角線A_1A_4、A_2A_5、A_3A_6、A_4A_7、A_5A_1、A_6A_2及A_7A_3的長度也彼此相等。請問七邊形$A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$是否必定為等邊七邊形？**

答：$A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$ 是等邊七邊形。



$\Delta A_1A_3A_5 \cong \Delta A_2A_4A_7 \cong \Delta A_3A_5A_1 \cong \Delta A_2A_4A_7$
$\cong \Delta A_2A_4A_6 \cong \Delta A_3A_5A_7 \cong \Delta A_4A_6A_1 \cong \Delta A_1A_3A_6$

$\angle A_6A_1A_3 = \angle A_7A_2A_4 = \angle A_1A_3A_5 = \angle A_2A_4A_6$
$= \angle A_3A_5A_7 = \angle A_4A_6A_1 = \angle A_5A_7A_2$

$\angle A_5A_1A_3 = \angle A_6A_1A_4 = \angle A_6A_2A_4 = \angle A_7A_2A_5$
$= \angle A_1A_3A_6 = \angle A_7A_3A_5 = \angle A_2A_4A_7 = \angle A_1A_4A_6$
$= \angle A_3A_5A_1 = \angle A_2A_5A_7 = \angle A_4A_6A_2 = \angle A_3A_6A_1$
$= \angle A_5A_7A_3 = \angle A_4A_7A_2$

$\angle A_6A_1A_5 = \angle A_4A_1A_3 = \angle A_7A_2A_6 = \angle A_5A_2A_4 = \angle A_1A_3A_7 = \angle A_6A_3A_5$
$= \angle A_2A_4A_1 = \angle A_7A_4A_6 = \angle A_3A_5A_2 = \angle A_1A_5A_7 = \angle A_4A_6A_3 = \angle A_2A_6A_1$
$= \angle A_5A_7A_4 = \angle A_3A_7A_2$

$\Delta A_1A_2A_4 \cong \Delta A_2A_3A_5 \cong \Delta A_3A_4A_1 \cong \Delta A_4A_5A_2 \cong \Delta A_5A_6A_3 \cong \Delta A_6A_7A_4 \cong \Delta A_7A_1A_5$

故 $A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4 = A_4A_5 = A_5A_6 = A_6A_7 = A_7A_1$，$A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$ 是等邊七邊形。

3. 設 n 為任意正整數，將 $n+1$、$n+2$、$n+3$、……、$2n$ 中每一個數的最大的奇因數相加，試證所得之和為 n^2。

答：令 $f(n)$為 n 之最大奇因數，則 $f(n) = f(2n)$，$f(1) = f(2) = 1$。對任意正整數 n，定義 $S(n) = \sum_{k=n+1}^{2n} f(k)$。以下考慮對 n 作數學歸納法，證明 $S(n) = n^2$.

(1) 當 $n = 1$ 時，$S(1) = f(2) = 1 = 1^2$；$n = 2$ 時，$S(2) = f(3) + f(4) = 3 + 1 = 2^2$。
(2) 假設對某些 $k \ge n \ge 3$ 的 n 值，$S(n) = n^2$ 成立，即

$$f(k+1) + f(k+2) + \cdots + f(2k) = k^2.$$

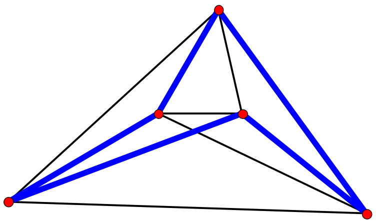
(3) 考慮 $n = k + 1$ 時，$S(k+1) = f(k+2) + f(k+3) + \cdots + f(2k+2)$。因為 $f(2k+2) = f(k+1)$，所以 $S(k+1) = f(k+2) + f(k+3) + \cdots + f(2k) + f(2k+1) + f(k+1) = k^2 + f(2k+1) = k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2$。

由(1)　(3)及根據數學歸納法得知：對任意正整數 n，$S(n) = n^2$ 恆成立，也就是說，對任意正整數 n，將 $n+1$、$n+2$、$n+3$、……、$2n$ 之中每一個數的最大的奇因數相加所得之和必為 n^2。

4. 平面上有 n ($n>3$)個點，任意三點都不共線，將這些點兩兩用線段相連。所有這些線段中有些線段整條塗上紅色，其餘的線段則整條塗上藍色，使得所有紅色的線段構成一個不自交的封閉曲線(即，由此曲線中的任一個頂點開始，可以繞經所有的同色線段，最後繞回此頂點，在途中同色線段互不相交於端點以外的點，且每個頂點恰好各進出一次)；所有藍色的線段也構成

一個不自交封閉曲線。試求所有滿足上述情況的 n 值，並說明點的配置情形及如何塗色。

答：由於每個點上紅、藍恰可一進一出，共 4 條線段，故 $n = 5$。下圖是一個例子。



5. 有一個$1\times n$的方格表，在最左邊的 25 個方格裏各放置一個棋子。每個棋子可以向右移動一格到空格上或恰好跳過一個棋子到這個棋子右邊的空格上，棋子不可以向左移動。若能將這 25 個棋子移動至連續的 25 個方格上且其順序正好與原來的順序相反，請問 n 的最小值是多少？

答：n 的最小值為 50。

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, \cdots, 23, 24, 25.$$

我們把這 25 個棋子從左到右依序編號 1　25 號，先由 24 跳過 25，再前進一格到左邊算起第 27 個方格的位置，接著，22 連續跳過 23，25，24 這三個棋子，再前進一格到左邊算起第 29 個方格的位置；接著，20 連續跳過 21，23，25，24，22 這五個棋子，再前進一格到左邊算起第 31 個方格的位置…；2 連續跳過 3，5，7，9，…，23，25，24，22，20，18，…，8，6，4 這些棋子，再前進一格到左邊算起第 49 個方格的位置。
接著 1 先前進一格，再連續跳過 3，5，7，…，25，24，22，…，4，2 到左邊算起第 50 個方格的位置上定位；3 先前進一格，再連續跳過 5，7，…，25，24，22，…，6，4 到左邊算起第 48 個方格的位置上定位；5 先前進一格，再連續跳過 7，…，25，24，22，…，8，6 到左邊算起第 46 個方格的位置上定位…；23 先前進一格，再連續跳過 25，24 到左邊算起第 28 個方格的位置上定位；25 前進一格到左邊算起第 26 個方格的位置上定位。
這時，棋子順序為 25，24，…，3，2，1，依序分別在第 26，27，…，50 個方個上，所以 $n = 50$。
因為要將這25個棋子移動至連續的25個方格上且其順序正好與原來的順序相反，故 n 至少要為 49。但因編號 2，4，6，…，24 的棋子跳過 25 之後必須再前一格，否則 1 跳不到這些棋子的最右邊的位置，棋子不能向左移動，故 n 最少要 $25 + 24 + 1 = 50.$
如果是 24 最後跳，則 25 必須向右移進一格，否則 23，22，… 的棋子無法跳過 24，25。因此 n 之最小值為 50。

International Mathematics Tournament of Towns
環球城市數學競賽
2003 秋季賽　高中組初級卷　參考解答

1. **設** n **為任意正整數，將** $n+1$、$n+2$、$n+3$、……、$2n$ **中每一個數的最大的奇因數相加，試證所得之和為** n^2。

   答：詳見國中初級卷第三題。

2. **有一種電腦軟體只能複製一個邊長為** 1 **的正方形的四個邊，然後貼上。請問要構造出一幅** 25×25 **的方格表，至少總共要貼上幾個正方形？**

   答：至少要貼上 360 **個正方形。**
   以中心方格為正中央，將 25×25 **的方格表區分成** 12 **個厚度為** 1 **的方形環，則由中心往外數的第** k **的環由** $8k$ **個方格所組成。**
   所有在最外圍一環的方格都要複製，也就是 25×25 **方格表的周界。在其他的環中，任何兩個相鄰(有公共邊) 的方格，必須有一個要複製，因此至少要複製** $24\times4+(4+44)\times11/2=360$。**另一方面，如果我們將** 25×25 **的方格表以黑白相間的方式塗色，最角落是塗黑色。我們可以複製在最外圍一環的方格及所有塗白色的方格即可造出一幅** 25×25 **的方格表。所以，至少總共要貼上** 360 **個邊長為** 1 **的正方形。**

3. **某個國家的錢幣分別是由** 1 **元、**5 **元、**10 **元、**50 **元、**100 **元、**500 **元及** 1000 **元的紙鈔或硬幣組成。已知有一位售貨員及一位顧客共有** 1999 **元，若某一個物品的價格為** a **元，**a **為正整數，且顧客的錢不少於** a **元。試證：無論** a **的值為何，顧客購買這樣物品時，售貨員都可以找給顧客正確的零錢。**

   答：(i) 1 **張** 5 **元** $_{(A)}$ = 5 **張** 1 **元** $_{(B)}$**，找零錢時，**(B) **比** (A) **好找。**(**容易找開**)
   1 **張** 10 **元** $_{(A)}$ = 2 **張** 5 **元** $_{(B)}$ = 10 **張** 1 **元** $_{(C)}$**，找零錢時，**(C) **比** (B) **好找，**(B) **比** (A) **好找。**
   1 **張** 50 **元** $_{(A)}$ = 5 **張** 10 **元** $_{(B)}$ = 10 **張** 5 **元** $_{(C)}$ = 50 **張** 1 **元** $_{(D)}$**，同理** (D) **比** (C) **好找，**(C) **比** (B) **好找，**(B) **比** (A) **好找。**
   ……**，即　同樣多的錢數，小鈔愈多(大鈔愈少)找錢愈容易。**

   (ii) (**顧客的錢數** x **元**) + (**售貨員的錢數** y **元**) = 1999 **元** (**兩人的錢放在一起**)**，而** 1999 **元中，小鈔最少(大鈔最多)的情況為**
   1999 元 = 1000 元 + 900 元 + 90 元 + 9 元
   = [1000 元 × 1] + [(500 元 × 1) + (100 元 × 4)]
   + [(50 元 × 1) + (10 元 × 4)] + [(5 元 × 1) + (1 元 × 4)] ………… (∗)

   (iii) **考慮將二人的錢合併在一起，物品價格為** a **元** ($a\in\mathrm{N}$，$1\le a\le x\le1999$)，

售貨員必須找 $(x-a)$ 元給顧客，即顧客取回 $(x-a)$ 元，而 $0 \le x-a < x \le 1999$，即

$$x-a = 0, 1, 2, 3, \cdots\cdots, 1998.$$

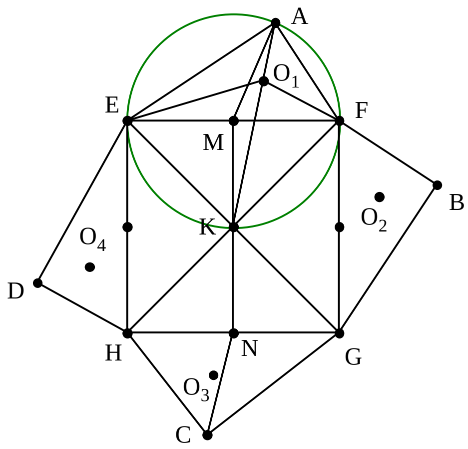
令 $x' = x-a$ (找回的錢)
只須證明：若 $x' \in \{0, 1, 2, \cdots, 1998\}$時，則 x' 可由 $(*)$ 式中的“某些紙鈔”來表示。

(iv) 列表證明如下：

錢數	1 元	5 元	10 元	50 元	100 元	500 元	1000 元	可付出錢數的範圍 (單位：元)
張數	4							0　4
	4	1						0　4 + 5 (= 9)
	4	1	4					0　9 + 40 (= 49)
	4	1	4	1				0　49 + 50 (= 99)
	4	1	4	1	4			0　99 + 400 (= 499)
	4	1	4	1	4	1		0　499 + 500 (= 999)
	4	1	4	1	4	1	1	0　999 + 1000 (= 1999)

“小鈔最少”之情況都可以找給顧客正確的零錢，“小鈔更多”的情況更容易找零錢。本題證畢。

4. 用邊長為 1 之正方形的四個邊為斜邊分別向正方形外作四個直角三角形。令點 A、B、C、D 分別為這四個直角三角形直角上的頂點。O_1、O_2、O_3、O_4 分別為這四個直角三角形內切圓的圓心。試證：
(a) 四邊形 $ABCD$ 的面積不大於 2。
(b) 四邊形 $O_1O_2O_3O_4$ 的面積不大於 1。



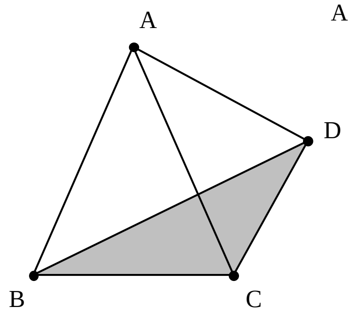
答：(a) 我們使用[P]來表示多邊形 P 的面積值。設單位正方形為 $EFGH$，M 為 EF 中點，N 為 GH 中點，則 $AC \le AM + MN + NC = 2$。同理，$BD \le 2$。
如右圖所示，令 A 點及 C 點至 BD 之距離和為 m，則 $m \le AC$，$[ABCD] = [BAD] + [BCD] = m \times BD/2 \le AC \times BD/2 \le 2$.

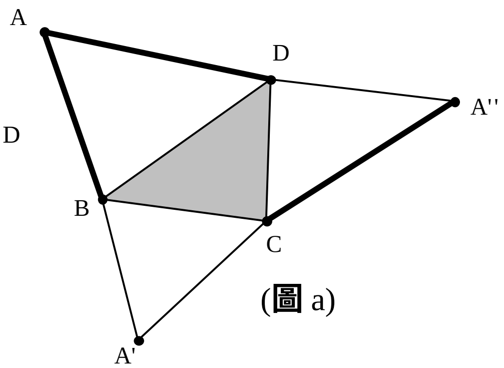
(b) 設 K 為 $EFGH$ 之中心，因為 $\angle EKF = 90° = \angle EAF$，所以 A，E，K，F 四點共圓。又 $EK = FK$，所以 AK 為 $\angle EAF$ 之角平分線，點 O_1 在線段 AK 上。因為 O_1E 平分 $\angle AEF$，所以

$\angle KO_1E = \angle KAE + AEO_1 = \angle KEF + \angle O_1EF = \angle KEO_1$，$KO_1 = KE = 1/\sqrt{2}$
同理，$KO_2 = KO_1 = KO_4 = 1/\sqrt{2}$。
因此，$O_1O_3 \le KO_1 + KO_3 = \sqrt{2}$，$O_2O_4 \le KO_2 + KO_4 = \sqrt{2}$，同(a)，有 $[O_1O_2O_3O_4] \le O_1O_3 \times O_2O_4/2 \le 1$.

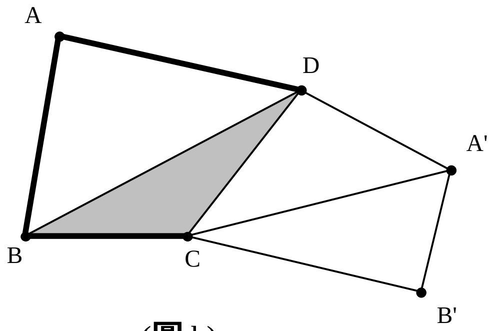
5. **將一個紙片作成的四面體(不必要是正的)，沿著它其中的三個稜邊剪開後把它展開平放在桌面上，如果此展開的紙片的外形仍是一個三角形，則把這組剪開的三個稜邊稱為「好的組」。如果此展開的紙片上四面體的每個表面的三個邊的延長線，都不會通過四面體的其它表面的內部，則把這組剪開的三個稜邊稱為「完美組」。**
請問對於任意四面體是否每個「好的組」都必定是「完美組」？

答：因為四面體只有四個頂點，要沿三個稜邊剪開，使它展開後的圖形不分離為二，我們不能同時對某一面的三個稜邊裁剪。也就是說，以四面體 ABCD **的** ABC **這一面而言，不能同時裁剪** AB **邊，**BC **邊及** AC **邊，否則會分離出一個三角形片** ABC **及另一個無法展開的形體，這樣子不符合題設要求。**





(圖 a)



(圖 b)

假設我們裁剪 AB **邊時，從** A **點沿** AB **劃向** B **點劃開** AB **邊，記作**(A **出**, B **進**)**。對四面體要取三個稜邊來裁剪，每個稜邊有兩個端點，所以，裁剪四面體時若不是「至少會有二個頂點是刀子“進、出各一次”，或“兩出”，或“兩進”」，就是「對同一頂點所連結的三個稜邊做裁剪」。只有這兩種情形。**
Case 1**：不失一般性，若是選取** A **點所連結的三個稜邊做裁剪，我們所得到的圖形必如圖** a**，題設是問：是否每個「好的組」都必定是「完美組」，假設** AB**，**AC**，**AD **是一個「好的組」，則展開後的圖形** ABA′CA″D **必是三角形，且** AB = BA′**，**A′C = CA″**，**A″D = DA**，也就是說，**A**，**B**，**A′**三點共線，**A**，**D**，**A″**三點共線，**A′**，**C**，**A′**三點共線，**B**，**C**，**D **三點恰為三角形三邊中點。顯然，三角形** A′BC**，**A″CD**，**ABD **及** BCD **的三個邊的延長線，都不會通過四面體的其它表面的內部，所以這種「好的組」必是「完美組」。**
Case 2**：如圖** b**，裁剪** AB**，**AD **及** CD **與** AB**，**AD **及** BC **是一樣的，我們看後面這一組。若** AB**，**AD **及** BC **是一個「好的組」，則展開後的圖形** ABCB′A′D **必須是一個三角形，所以** B**，**C**，**B′**三點共線，**A**，**D**，**A′**，**B′**四點共線。顯然，三角形** A′B′C**，**A′CD**，**ABD **及** BCD **的三個邊的延長線，都不會通過四面體的其它表面的內部，所以這種「好的組」也必是「完美組」。**
綜上所述可知，對任意四面體而言，每個「好的組」都必定是「完美組」。