

# International Mathematics Tournament of Towns

## 環球城市數學競賽

2004 秋季賽 高中組 高級卷 參考解答

※每題必須詳細寫下證明及理由，只寫答案不一定有分數。

1. 對於任意實數  $x$  與  $y$ ，函數  $f$  與  $g$ ，都有  $g(f(x))=x$ ，且  $f(g(y))=y$ 。若對於所有實數  $x$ ， $f(x)=kx+h(x)$ ，其中  $k$  是常數，且  $h(x)$  是週期函數。試證  $g(x)$  同樣也可以表示為一個線性函數與一個週期函數的和。(註：對於任意實數  $x$ ，若  $h(x+p)=h(x)$ ，其中  $p$  為固定的實數，則我們稱  $h(x)$  為週期函數。)(五分)

解：

對於任意實數  $x$  與  $y$ ，函數  $f$  與  $g$ ，都有  $g(f(x))=x$ ，且  $f(g(y))=y$

- $f$ 、 $g$  為一對一且映成函數 •  $k \neq 0$

令  $f(x)=kx+h(x)=y$ ，則  $x=g(f(x))=g(kx+h(x))=g(y)$

$g(k(x+p)+h(x+p))=x+p$ ，即  $g(y+kp)=x+p=g(y)+p$

令  $l(y)=g(y)-\frac{y}{k}$ ，則  $l(y+kp)=g(y+kp)-\frac{y+kp}{k}=g(y)+p-\frac{y}{k}-p=l(y)$

- $g(y)=\frac{y}{k}+l(y)$ ，其中  $l$  為周期是  $kp$  的函數。

評分標準：

(1) 說明  $f$ 、 $g$  為一對一且映成函數  $\rightarrow \frac{1}{7}$ 。

(2) 證明  $g(y)=x \rightarrow \frac{1}{7}$ 。

(3) 證明  $g(y+kp)=g(y)+p \rightarrow \frac{3}{7}$ 。

(4) 會設  $l(y)=g(y)-\frac{y}{k} \rightarrow \frac{2}{7}$ 。

(5) 求出  $g(y)=\frac{y}{k}+l(y) \rightarrow \frac{2}{7}$ 。

2. 甲、乙二人輪流由一堆珠子中取珠子。由甲先取，每次可以取 1 或 10 顆珠子，接著乙必須取  $m$  或  $n$  顆珠子；無法再依照上述規則取珠子者為輸家。若無論這堆珠子有多少顆，甲都有必勝的策略，試求  $m$ 、 $n$  之值。(五分)

解：

$m$ 、 $n$  之值為滿足  $m$ 、 $n \geq 9$  且  $|n-m| \neq 9$  的所有正整數組。

不失一般性，我們可以假設  $m \leq n$ 。

- (1) 證明除此之外的正整數組  $m$ 、 $n$  均不滿足要求。假設共有  $s$  顆珠子。

(1.1) 當  $1 \leq m \leq 8$  時，若  $s=m+1$ ，則甲只能取 1 顆，乙可以將剩餘的珠子全部取走，甲必敗。

(1.2) 當  $n=m+9$  時，若  $s=m+10$ ，則甲取 1 顆，乙就取以  $n=m+9$  顆；

甲取 10 顆，乙就取以  $m$  顆；無論甲如何取，以都能將剩餘的珠子全部取走，甲必敗。

所以除此之外的正整數組  $m$ 、 $n$  均不滿足要求。

(2) 當  $m$ 、 $n \geq 9$  且  $n - m \neq 9$  時

(2.1) 若  $s \leq m$ ，甲取 1 顆，即獲勝。

(2.2) 若  $m < s \leq n$ ，甲可選擇一種取法，使得剩餘珠子的數目不為  $m$  或  $n$ ；因為無論取 1 顆或 10 顆，剩餘珠子的數目必小於  $n$ ，且至多只有一種取法使剩餘珠子的數目為  $m$ ，甲只要選擇另一種即可。

(2.2.1) 此時，若剩餘珠子的數目小於  $m$ ，則甲獲勝。

(2.2.2) 此時，若剩餘珠子的數目大於  $m$ ，則乙只能取  $m$  顆珠子，甲再選擇一種取法，使得剩餘珠子的數目不為  $m$ ，依此類推，總可使得某次取後，剩餘珠子的數目小於  $m$ ，則甲獲勝。

(2.3) 若  $s > n$ ，甲仍可選擇一種取法，使得剩餘珠子的數目不為  $m$  或  $n$ ；否則  $m + 10 = n + 1$ ，與  $n - m \neq 9$  矛盾。此時，不論乙取  $m$  或  $n$  顆珠子，都無法將剩餘的珠子全部取完；於是，甲可再選擇一種取法，使得剩餘珠子的數目不為  $m$  或  $n$ ；依此類推，總可使得某次取後，剩餘珠子的數目不大於  $n$ ，則甲獲勝。

所以當  $m$ 、 $n \geq 9$  且  $|n - m| \neq 9$  時，甲都有必勝策略。

評分標準：

(1) 宣布  $m$ 、 $n \geq 9 \rightarrow \frac{1}{7}$ 。

(2) 宣布  $m$ 、 $n \geq 9$  且  $|n - m| \neq 9 \rightarrow \frac{2}{7}$ 。

(3) 證明  $1 \leq m \leq 8$  的情況  $\rightarrow \frac{1}{7}$ 。

(4) 證明  $n = m + 9$  的情況  $\rightarrow \frac{1}{7}$ 。

(5) 證明的情況  $m$ 、 $n \geq 9 \rightarrow \frac{3}{7}$ 。

3. 小丁 心裡想著兩個正數  $x$ 、 $y$ ，並在黑板上依隨意的順序寫下  $x + y$ 、 $x - y$ 、 $x \times y$  及  $x \div y$  四個數，然後請 小方 來猜他心裡想的那兩個數。試證只看到黑板上所寫的四個數，小方 一定有足夠的訊息可以唯一地算出  $x$ 、 $y$  之值。(五分)

解：

令  $S = \{x + y, x - y, x \times y, x \div y\}$

首先，由於  $x$ 、 $y$  為正數，故在  $x + y$ 、 $x - y$ 、 $x \times y$ 、 $x \div y$  中只有  $x - y$  可能不是正數。以下分三種情況討論：

(1)  $S$  含 0，則  $x = y$ 、 $x \div y = 1$ 。

考慮  $S$  中非零數的積，由  $(x \times y)(x + y) = 2x^3$  可得到  $x$ 、 $y$ 。

(2)  $S$  含負數，這時有  $x < y$ 、 $x \div y < 1$ 。記  $T = \{x + y, x \times y, x \div y\}$

令  $N$  為  $T$  中小於 1 的數的個數

(2.1)  $N = 1$ ，則  $T$  中最小的數為  $x \div y$ 。由  $x - y$ 、 $x \div y$  可確定  $x$ 、 $y$ 。

(2.2)  $N=2$ ，這時  $x+y$  不能小於 1 (若  $x+y < 1 \Rightarrow x < y < 1 \Rightarrow x \times y < 1 \Rightarrow N=3$ )，則  $T$  中最大的數為  $x+y$ 。由  $x-y$ 、 $x+y$  可確定  $x$ 、 $y$ 。

(2.3)  $N=3$ ，這時  $x+y < 1$ ，有  $x < y < 1$ ，於是  $x \times y < x+y$ 、 $x \times y < x \div y$ ， $x \times y$  為  $T$  中最小的數。由  $x-y$ 、 $x \times y$  可確定  $x$ 、 $y$ 。

(3)  $S$  中均為正數。

我們證明可將  $S$  中四個數分為兩組  $A$ 、 $B$ ，每組兩個數，使得  $A$  中兩數之和的平方為  $B$  中兩數之積的 4 倍，且  $A$  中的數之數值唯一確定。

由於可取  $A=\{x+y, x-y\}$ ， $B=\{x \times y, x \div y\}$ ，從而若上面斷言成立，則  $A$  中兩數的值必為  $x+y$ 、 $x-y$ ，這樣便可確定  $x$ 、 $y$ 。

現在證明這一點：令  $S=\{a, b, c, d\}$ ，假設有分法  $A$ 、 $B$  和  $A'$ 、 $B'$ ； $A$  和  $A'$  不同，則有兩種可能：

(3.1)  $A$  和  $A'$  沒有相同的數，

令  $A=\{a, b\}$ 、 $A'=\{c, d\}$ ；則  $B=\{c, d\}$ ， $B'=\{a, b\}$

這時有  $(a+b)^2=4cd$ 、 $(c+d)^2=4ab \Rightarrow (a-b)^2+(c-d)^2=0 \Rightarrow a=b$ 、 $c=d$ ；

進而由  $(a+b)^2=4cd$ ，得到  $a=b=c=d$  或  $a=b=-c=-d$

前者要求  $x+y=x-y$ ，後者說明有兩個負數，均不可能！

(3.2)  $A$  和  $A'$  恰有一個相同的數，

不妨設  $A=\{a, b\}$ 、 $A'=\{a, c\}$ ，且  $b$  不等於  $c$ 。

於是  $(a+b)^2=4cd$ 、 $(a+c)^2=4bd$ ；將此二等式的兩端分成乘以  $b$ 、 $c$ ，再將兩式相減得  $b(a+b)^2-c(a+c)^2=0$ ，

即  $(b-c)[a^2+2a(b+c)+b^2+bc+c^2]=0$

但是  $b-c$  非零，且由  $a$ 、 $b$ 、 $c$  為正數有  $a^2+2a(b+c)+b^2+bc+c^2 > 0$ 。矛盾！

以上分析說明可唯一確定  $x$ 、 $y$ 。

評分標準：

(1) 知道有 0 或負數時，此數必為  $x-y \rightarrow \frac{1}{7}$ 。

(2) 用小於 1 分類討論  $\rightarrow \frac{1}{7}$ 。

(3) 證明有 1 個負數時，可以唯一地算出  $x$ 、 $y$  之值  $\rightarrow \frac{4}{7}$ 。

(4) 知道找兩數之和的平方為另兩數之積的 4 倍  $\rightarrow \frac{1}{7}$ 。

(5) 證明全為正數時，可以唯一地算出  $x$ 、 $y$  之值  $\rightarrow \frac{2}{7}$ 。

(6) 討論兩數之和的平方為另兩數之積的 4 倍的分法唯一  $\rightarrow \frac{1}{7}$ 。

4. 已知圓心為  $I$  的圓整個都落在圓心為  $O$  的大圓的內部。線段  $AB$  是大圓內變動的弦，且與小圓相切。試求三角形  $IAB$  的外心的軌跡。(六分)

解：

設  $P$  為  $IAB$  的外心， $AB$  與圓  $I$  相切於  $C$ ；連  $OP$  交  $AB$  於  $D$ ；作  $IE \perp OP$



(1.2)從左邊開始看，直到出現一個不是以邊重合方式拼排的  $A$  種矩形（如圖 5-2 中粗線矩形）。考慮「縫隙」 $PQ$ ，該「縫隙」不會在  $Q$  處結束，否則，將與  $\frac{a_1}{a_2}$  為無理數矛盾！於是第二列的拼排方式應與第一列相同，直到「縫隙」 $PQ$  處。同樣的，可得大矩形在直線  $PQ$  左邊的部分是「平凡地」拼排；由歸納假設可知，在直線  $PQ$  右邊的部分也是如此，且方向相同。

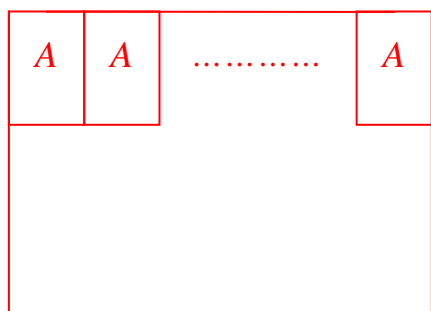


圖 5-1

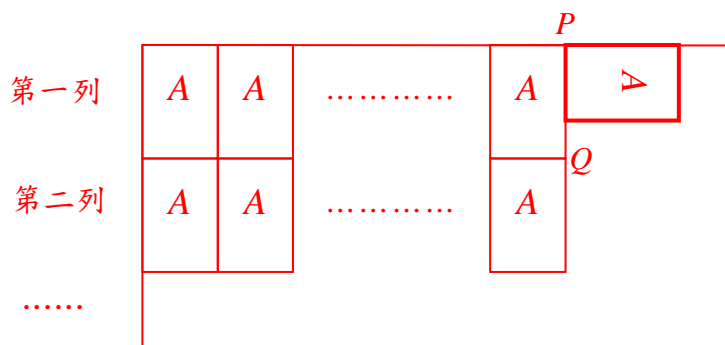


圖 5-2

於是我們證明了， $A$  種矩形只能「平凡地」拼出大矩形，如此，相當於  $u_1 = v_2 = 0$  或  $u_2 = v_1 = 0$ 。不妨設  $u_2 = v_1 = 0$ ，則由(\*)得  $\frac{u_1 a_1}{v_2 a_2} = \frac{b_1}{b_2} \Rightarrow \frac{v_2 b_1}{u_1 b_2} = \frac{a_1}{a_2}$ ；將  $B$  種矩形如圖 5-3 拼排，即可得相似於  $A$  種矩形的大矩形。

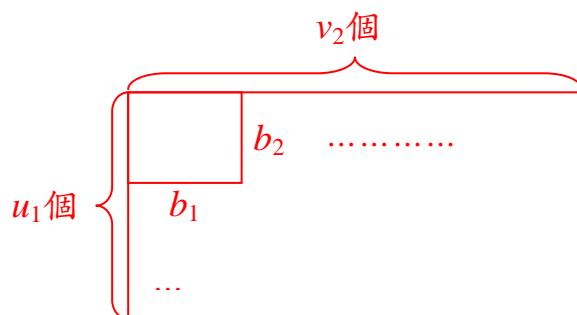


圖 5-3

(2) 若  $\frac{a_1}{a_2}$  為有理數，不失一般性，我們可以假設  $a_1$ 、 $a_2$ 、 $b_1$ 、 $b_2$  均為正整數，

由(\*)得  $\frac{a_1}{a_2} = \frac{v_2 b_1 - u_2 b_2}{u_1 b_2 - v_1 b_1} = \frac{v_2 b_1^2 b_2 - u_2 b_1 b_2^2}{u_1 b_1 b_2^2 - v_1 b_1^2 b_2} = \frac{(v_2 b_1 b_2 - u_2 b_2^2) b_1}{(u_1 b_1 b_2 - v_1 b_1^2) b_2}$ ；將  $B$  種矩形類似圖

5-3 拼排，將  $v_2$  換為  $v_2 b_1 b_2 - u_2 b_2^2$ 、 $u_1$  換為  $u_1 b_1 b_2 - v_1 b_2^2$ ，即可得相似於  $A$  種矩形的大矩形。

**評分標準：**

(1)證明長、寬均為整數的情況→1/7。

(2)證明長、寬均為有理數的情況→3/7。

(3)討論  $\frac{a_1}{a_2}$  為無理數的情況，其排列方式為「平凡的」→4/7。

6. 給定一個大於 3 的質數  $n$ 。若一個三角形每個內角的度數都可以表示為  $\frac{m}{n} 180^\circ$  的形式，其中  $m$  為正整數，則我們稱這個三角形為「可分解三角形」。開始時，在桌上有一個「可分解三角形」的紙片，每次操作可以從桌子上取一個三角形紙片，將它分割為二個「可分解三角形」然後放回桌上，但要求切割後桌上的所有三角形不能有任何二個三角形相似。重複上述操作，直到無法繼續操作為止。試證在此時桌子上會有每一種可能切出的「可分解三角形」。(八分)(註：兩個「可分解三角形」只要內角都相等，我們則視它們為同一種。)

解：

對於給定的質數  $n$ ，令  $S = \{a, b, c \mid a, b, c \in \mathbb{N}^+; a + b + c = n\}$ ，則  $S$  與可能切出的「可分解三角形」恰可一對一對應，即每一組  $\{a, b, c\}$  相當於三內角為  $\frac{a}{n} 180^\circ$ 、 $\frac{b}{n} 180^\circ$ 、 $\frac{c}{n} 180^\circ$  的一種三角形。

再令  $\Delta_{a,b,c} = \max\{|a-b|, |b-c|, |c-a|\}$ ，不失一般性，可設  $n$  為質數， $n > 3$  則  $\Delta_{a,b,c} > 0$ ；我們只要證明下述結論即可：只要桌上還有一種三角形沒有出現，則一定可以繼續操作。

用反證法證明：設桌上已有的三角形為  $A$  集合 ( $A \neq \emptyset$ )，且已無法再操作了。令  $\Delta_{\bar{a},\bar{b},\bar{c}} = \max_{\{a,b,c\} \in A} \Delta_{a,b,c}$ ，不妨設  $\bar{a} \leq \bar{b} \leq \bar{c}$ ，則  $\Delta_{\bar{a},\bar{b},\bar{c}} = \bar{c} - \bar{a}$ 。

若  $\bar{a} \neq \bar{b}$ ，我們考慮三角形  $\{\bar{a}, \bar{a} + \bar{c}, \bar{b} - \bar{a}\}$ ： $\Delta_{\bar{a}, \bar{a} + \bar{c}, \bar{b} - \bar{a}} \geq (\bar{c} + \bar{a}) - \bar{a} = \bar{c} > \Delta_{\bar{a},\bar{b},\bar{c}}$  則  $\{\bar{a}, \bar{a} + \bar{c}, \bar{b} - \bar{a}\} \notin A$ ，即三角形  $\{\bar{a}, \bar{a} + \bar{c}, \bar{b} - \bar{a}\}$  未出現在桌上；則可將三角形  $\{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\}$  如圖 6-1 切出三角形  $\{\bar{a}, \bar{a} + \bar{c}, \bar{b} - \bar{a}\}$ ，產生矛盾！所以  $\bar{a} = \bar{b}$ 。

於是，我們有  $\{\bar{a}, \bar{a}, \bar{c}\} \in A$ ， $\bar{a} < \bar{c}$ ，考慮三角形  $\{\bar{a}, 2\bar{a}, \bar{c} - \bar{a}\}$ ：如果  $\{\bar{a}, 2\bar{a}, \bar{c} - \bar{a}\} \notin A$ ，則可將三角形  $\{\bar{a}, \bar{a}, \bar{c}\}$  如圖 6-2 切出三角形  $\{\bar{a}, 2\bar{a}, \bar{c} - \bar{a}\}$  產生矛盾！所以  $\{\bar{a}, 2\bar{a}, \bar{c} - \bar{a}\} \in A$  則

$$\Delta_{\bar{a}, 2\bar{a}, \bar{c} - \bar{a}} \geq 2\bar{a} - (\bar{c} - \bar{a}) = 3\bar{a} - \bar{c} \Rightarrow 3\bar{a} - \bar{c} \leq \Delta_{\bar{a}, 2\bar{a}, \bar{c} - \bar{a}} \leq \Delta_{\bar{a}, \bar{a}, \bar{c}} = \bar{c} - \bar{a} \Rightarrow 2\bar{a} \leq \bar{c}$$

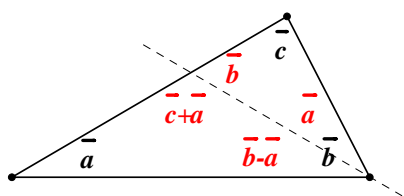


圖 6-1

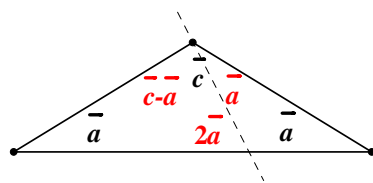


圖 6-2

若  $2\bar{a} < \bar{c}$ ，繼續考慮三角形  $\{\bar{a}, 3\bar{a}, \bar{c} - 2\bar{a}\}$ ，同理可得  $\{\bar{a}, 3\bar{a}, \bar{c} - 2\bar{a}\} \in A$  則  $3\bar{a} \leq \bar{c} \cdots \cdots$  顯然， $k\bar{a} \leq \bar{c}$  不可能永遠成立下去，因此，必存在  $l \in \mathbb{N}^+$ ，使得  $l\bar{a} = \bar{c}$  則  $(l+2)\bar{a} = n$ 。

$\because n$  為質數， $n > 3 \therefore l$  為奇數， $\bar{a} = 1$ 。

令  $n = 2k + 3 (k \geq 1)$ ，則  $\{1, 1, 2k+1\}$ 、 $\{1, 2, 2k\} \cdots \{1, k+1, k+1\} \in A$ ；記  $\inf_{\{a,b,c\} \in A} \{a,b,c\} = \min_{\{a,b,c\} \in A} \{a,b,c\}$ ，則  $I_1 = \{a, b, c$

$\mid \inf_{\{a,b,c\} \in A} = 1\} \subset A$ ；下面用歸納法證明：對於每一個  $j$ ， $I_j = \{a, b, c \mid \inf_{\{a,b,c\} \in A} = j\} \subset A \cdots (*)$ 。

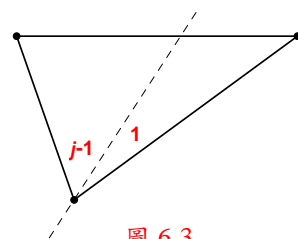


圖 6-3



假設小於  $j$  時，(\*)均成立。當等於  $j$  時，對於每一個  $S = \{a, b, c\} \in I_j$ ，將  $S$  如圖 6-3 切分為  $S'$  和  $S''$ ，則  $S' \in I_1 \subset A$ 、 $S'' \in I_{j-1} \subset A$ ，且  $S' \neq S''$ ，操作合法，所以  $S \in A$  可得  $I_j \subset A$ 。

所以到無法繼續操作時，桌子上會有每一種可能切出的「可分解三角形」。

評分標準：

- (1). 宣佈只要桌上還有一種三角形沒有出現，則一定可以繼續操作  $\rightarrow 1/7$ 。
- (2). 考慮等腰三角形的情況  $\rightarrow 1/7$ 。
- (3). 考慮一般三角形的情況  $\rightarrow 5/7$ 。

7. 由點  $O$  出發的射線  $OA$ 、 $OC$ 、 $OB$ 、 $OD$  在平面上依逆時針方向排列， $\angle AOB = \angle COD$ 。已知圓  $S$  與  $OA$ 、 $OB$  相切，圓  $T$  與  $OC$ 、 $OD$  相切，且圓  $S$  與圓  $T$  交於  $E$ 、 $F$  二點。試證  $\angle AOE = \angle DOF$ 。(八分)

解一：

設圓  $S$  與圓  $T$  的半徑分別為  $r_S$ 、 $r_T$ ，圓  $S$  切  $OA$  於  $G$ ，圓  $T$  切  $OD$  於  $H$ ，則

$$\angle SOG = \frac{1}{2} \angle AOB = \frac{1}{2} \angle COD = \angle TOH,$$

$\angle OGS = 90^\circ = \angle OHT$  可得  $\triangle SOG$  相似於

$$\triangle TOH \text{ 可得 } \frac{OS}{OT} = \frac{SG}{TH} = \frac{r_S}{r_T} = \frac{ES}{ET} = \frac{FS}{FT}.$$

令過  $O$ 、 $E$ 、 $F$  的圓為圓  $U$ ，則圓  $U$  即是滿足  $\frac{PS}{PT} = \frac{r_S}{r_T}$  的  $P$  點軌跡。

設圓  $U$  與線段  $ST$  交於  $I$  點，則

$$\frac{IS}{IT} = \frac{r_S}{r_T} = \frac{OS}{OT} \text{ 可得線段 } OI \text{ 是 } \angle TOS \text{ 的角平分線；又 } EI = IF \text{ 可得 } \angle IOE = \angle IOF,$$

所以

$$\angle AOE = \angle AOS + \angle SOI + \angle IOE = \angle DOT + \angle TOI + \angle IOF = \angle DOF$$

評分標準：

- (1). 證明  $\triangle SOG$  相似於  $\triangle TOH \rightarrow \frac{1}{7}$ 。
- (2). 證明線段  $OI$  是  $\angle TOS$  的角平分線  $\rightarrow \frac{3}{7}$ 。
- (3). 證明  $\angle IOE = \angle IOF \rightarrow \frac{2}{7}$ 。
- (4). 證明  $\angle AOE = \angle DOF \rightarrow \frac{1}{7}$ 。

解一：(高雄中學蔡政江的解答)

