

International Mathematics Tournament of Towns

環球城市數學競賽

2004 秋季賽 國中組 初級卷 參考解答

※每題必須詳細寫下證明及理由，只寫答案不一定有分數。

1. 是否能將正整數 $1、2、3、\dots、2003、2004$ 重新排列，使得任意連續十項的和都可以被 10 整除？(三分)

解：

判斷一個正整數是否可以被 10 整除，只要看個位數是否為 0，所以，我們只需要考慮個位數，重新排列個位數即可。

$1\sim 2004$ 中，個位數字為 5、6、7、8、9、0 的各有 200 個，個位數字為 1、2、3、4 的則各有 201 個。

假設能將正整數 $1、2、3、\dots、2003、2004$ 重新排列，使得任意連續十項的和都可以被 10 整除，那麼在這個排列中，第 1 項與第 11 項的個位數應該要相同，第 2 項與第 12 項的個位數也應該要相同……依此類推，個位數字應該是一個週期為 10 項的數列，且一個週期中的 10 項，其個位數均不相同；否則，假設有某 2 項是的個位數是相同，從而在整個 2004 項的數列中，至少有 400 項的個位數都是這個數字；這與 $1\sim 2004$ 中，個位數相同的最多只有 201 項矛盾。

然而， $0+1+2+\dots+9=45$ ，45 不能被 10 整除，產生矛盾，所以不可能將正整數 $1、2、3、\dots、2003、2004$ 重新排列，使得任意連續十項的和都可以被 10 整除。

評分標準：

- (1)說明個位數字為 5、6、7、8、9、0 的各有 200 個，個位數字為 1、2、3、4 的則各有 201 個→1/7。
- (2)說明個位數字應該是一個週期為 10 項的數列→2/7。
- (3)說明在一個週期中的 10 項個位數均不同→3/7。
- (4)指出 $0+1+2+\dots+9=45$ ，45 不能被 10 整除→1/7。

2. 一個盒子內有紅、綠、藍、白四種顏色的珠子共 111 顆。已知我們隨意從盒內取出 100 顆珠子，可以保證取出的珠子中四種不同顏色的珠子都會出現。請問我們至少要從盒內隨意取出多少顆珠子，在滿足上述條件下，無論各種顏色的珠子如何分配，也一定可以保證取出的珠子中至少有三種不同顏色？(四分)

解：

- (1)首先，我們要指出只取出 87 顆的珠子是不夠的。

我們可以在盒子中放 75 顆紅色珠子與綠色、藍色、白色珠子各 12 顆，那麼，任何三種顏色的珠子數量最多是 99 顆，因此，我們隨意從盒內取

出 100 顆珠子，取出的珠子中一定四種不同顏色的珠子都會出現，滿足題目條件。

在這樣的情況下，我們隨意從盒內取出 87 顆珠子，結果有可能是 75 顆色紅珠子與 12 顆綠色珠子，只有二種顏色。

- (2)再證明取出 88 顆的珠子，就可以保證：無論各種顏色的珠子如何分配，取出的珠子中至少有三種不同顏色。

不失一般性，我們可以假設紅色珠子的數量 \geq 綠色珠子的數量 \geq 藍色珠子的數量 \geq 白色珠子的數量。

白色珠子至少有 12 顆；否則，隨意取出 100 顆珠子就有可能沒有白色珠子。同理，藍色珠子也是至少有 12 顆，則白色珠子與藍色珠子至少有 24 顆，也就是說另外兩個顏色（紅色和綠色）的珠子數量最多是 $111-24=87$ 顆，所以只要取出 88 顆珠子，就可以保證取出的珠子中至少有三種不同顏色。

評分標準：

- (1)指出任意顏色的珠子至少有 12 顆 $\rightarrow 1/7$ 。
- (2)說明若有某色的珠子少於 12 顆，則無法滿足題目條件 $\rightarrow 1/7$ 。
- (3)說明取出 88 顆的珠子是足夠的 $\rightarrow 2/7$ 。
- (4)說明取出 87 顆的珠子是不夠的 $\rightarrow 3/7$ 。

3. 有若干個城市，其中的某些城市之間有巴士行駛（每條路線的巴士都是雙向對開，在中途沒有任何停靠站）。我們可以搭乘巴士從任何一個城市到任何其它城市（有可能中途經過其它的一些城市轉乘）。小強購買所有巴士營運路線的單程票各 1 張（一張 P 、 Q 城市之間的單程車票可以用來由城市 P 搭乘巴士至城市 Q 一趟，或由城市 Q 搭乘巴士至城市 P 一趟，但不得雙程使用）；小皮則購買所有巴士營運路線的單程票各 n 張。小強與小皮都由城市 A 出發，小強用盡所有的車票後，沒有再購買任何新的車票，結果他最終抵達城市 B ；小皮搭了一陣巴士後，用了部份的車票，如果他不再購買任何新的車票，他已無法離開城市 X （因為他已沒有由城市 X 到任何其它城市的車票）。試證：城市 X 必為城市 A 或城市 B 二者之一。（四分）

解：

先考慮城市 A 與城市 B 之外的任何一個城市，假設是城市 C 。若小強到城市 C 的次數為 k 次，那麼，他進入城市 C 時用了 k 張車票，離開城市 C 也用了 k 張車票，也就是說小強有 $2k$ 張票與城市 C 有關；而小皮購買所有巴士營運路線的單程票各 n 張，所以小皮有 $2kn$ 張票與城市 C 有關，於是，小皮可以進出 kn 次城市 C ，不會被卡在城市 C ，無法離開。所以，城市 X 必為城市 A 或城市 B 二者之一。

評分標準：

- (1)有一筆畫的概念 $\rightarrow 1/7$ 。
- (2)指出城市 A 、城市 B 為奇點 $\rightarrow 2/7$ 。
- (3)指出除城市 A 、城市 B 之外的各城市都是偶點 $\rightarrow 2/7$ 。

(4)指出除城市 A、城市 B 之外的各城市之票有 k 張進、 k 張出，不可能被卡住 $\rightarrow 2/7$ 。

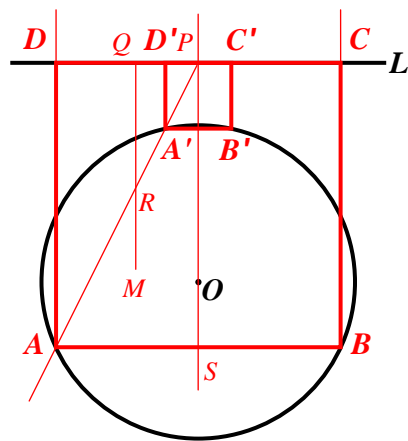
4. 平面上任意給定一個圓及一條與此圓不相交的直線。請使用沒有刻度的直尺與圓規作一個正方形，使得此正方形相鄰的二個頂點在此給定圓的圓周上，另二個頂點則在所給定的直線上（假設這樣的正方形確定存在）。（五分）

解：

假設給定圓的圓心為 O ，給定直線為 L 。

作法如右圖所示：

- (1)過圓心 O 做直線 L 的垂線，交 L 於 P 。
- (2)在 L 上取異於 P 點的點 Q ，過點 Q 做直線 L 的垂線 M 。
- (3)在直線 M 上，且與圓心 O 在 L 的同側取一點 R ，使得線段 $QR = 2PQ$ 。
- (4)做射線 PR 交圓 O 於 A 、 A' 。
- (5)過 A （或 A' ）做直線 L 的垂線交 L 於 D （或 D' ）。
- (6)過 A （或 A' ）做直線 OP 的垂線交 OP 於 S 、交圓 O 於 B （或 B' ）。
- (7)過 B （或 B' ）做直線 L 的垂線交 L 於 C （或 C' ）。
- (8)正方形 $ABCD$ （與 $A'B'C'D'$ ）即為所求。



證明：

AB 與 DC 都垂直於 OP ，所以 AB 與 DC 平行

QR 、 DA 與 CB 都垂直於 L ，所以 QR 、 DA 與 CB 平行

$\Rightarrow ASPD$ 、 $ABCD$ 為矩形，且 $\frac{DA}{DP} = \frac{QR}{QP} = \frac{2QP}{QP} = 2$ ，即 $DA = 2DP$ 。

AB 為圓 O 的弦， $OS \perp AB \Rightarrow AS = SB$

$DA = 2DP = 2AS = AS + SB = AB$ ，得證 $ABCD$ 為正方形。

同理可證， $A'B'C'D'$ 為正方形，即此種情況有二解。

若射線 PR 與圓 O 切於點 A ，同樣的作圖方法可得所求之正方形；此時恰有一解。

若射線 PR 與圓 O 沒有交點，則此正方形不存在；但題目已說明不考慮這種情況。

評分標準：

- (1)做出圖形 $\rightarrow 4/7$ 。
- (2)證明所做圖形正確 $\rightarrow 2/7$ 。
- (3)討論一解或二解 $\rightarrow 1/7$ 。

5. 將 2004 分拆為一個或一個以上的正整數之和，且這些正整數「差不多相等」。所謂一些正整數「差不多相等」是指它們之中的任意兩個數的差等於 1 或 0。請問滿足上述條件的分拆方法共有多少種？（注意：如果分拆後的正整數都相同，但只有次序不同，視其為同一種分拆方法。）（五分）

解：

對於任意整數 k ， $1 \leq k \leq 2004$ ，利用算術基本定理，我們可以找到唯一的數對 (q, r) ，使得 $2004 = kq + r$ ， $0 \leq r \leq k - 1$ 。

$$\underbrace{(q+1) + (q+1) + \dots + (q+1)}_{r \text{ 個}} + \underbrace{q + q + \dots + q}_{k-r \text{ 個}} = r(q+1) + (k-r)q = kq + r = 2004, \text{ 即}$$

2004 可以分拆為 r 個 $(q+1)$ 與 $(k-r)$ 個 q ，且 $(q+1)$ 與 q 是「差不多相等」的正整數。

所以，對於每一個 k ，我們都可以得到一個滿足題目條件的唯一分拆方法，而 k 可以取 $1, 2, \dots, 2004$ ，所以共有 2004 種分拆方法。

評分標準：

(1) 給出 5 個以上的正確分拆例子 $\rightarrow 1/7$ 。

(2) 會用 $\left\lfloor \frac{2004}{k} \right\rfloor$ 之值 $\rightarrow 2/7$ 。

(3) 會分為 r 個 $(q+1)$ 與 $(k-r)$ 個 $q \rightarrow 5/7$ 。

(4) 說明對於每一個 k ，分拆方法是唯一的 $\rightarrow 2/7$ 。

《成績是取最高得分三題的總和，考試時間四小時。》