

International Mathematics Tournament of Towns

環球城市數學競賽

2004 秋季賽 高中組 初級卷 參考解答

※每題必須詳細寫下證明及理由，只寫答案不一定有分數。

1. 三個圓都通過 X 點，它們異於 X 點的其他交點分別為 A 、 B 、 C 三點。點 A' 是直線 AX 與三角形 BCX 的外接圓的另一個交點；點 B' 是直線 BX 與三角形 ACX 的外接圓的另一個交點；點 C' 是直線 CX 與三角形 ABX 的外接圓的另一個交點。試證：三角形 ABC' 、 $AB'C$ 、 $A'BC$ 兩兩相似。(三分)

解：

若三圓相交情形如圖(1)， $A'BXC$ 、 $AB'CX$ 、 $AXBC'$ 為圓內接四邊形

$\angle ABC' = \angle AXC'$ (等弧對等圓周角) $= \angle A'XC$ (對頂角)

$= \angle A'BC$ (等弧對等圓周角) $= 180^\circ - \angle AXC$ ($\angle AXA' = 180^\circ$)

$= \angle AB'C$ ($AB'CX$ 為圓內接四邊形)

同理可證， $\angle A'BC = \angle AB'C = \angle ABC'$ ， $\angle BA'C = \angle B'AC = \angle C'AB$

$\therefore \triangle A'BC \sim \triangle AB'C \sim \triangle ABC'$

若三圓相交情形如圖(2)，同理可證。

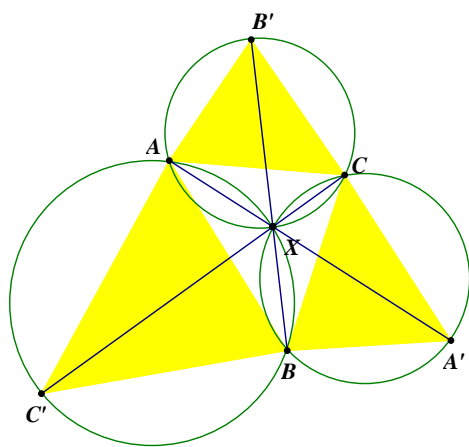


圖 1

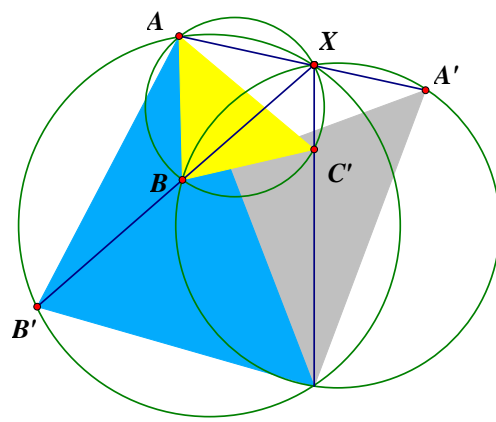


圖 2

評分標準：

(1) 會用等弧對等圓周角 $\rightarrow \frac{2}{7}$ 。

(2) 會用圓內接四邊形內對角和 $180^\circ \rightarrow \frac{2}{7}$ 。

(3) 只證明其中一種情況 $\rightarrow \frac{6}{7}$ 。

2. 在一個盒子內有藍、紅、白三種顏色的珠子共 100 顆。已知我們隨意從盒內取出 26 顆珠子，可以保證至少有 10 顆珠子的顏色是相同的。請問我們至少要從盒內隨意取出多少顆珠子，在滿足上述條件下，無論各種顏色的珠子如何分配，也一定可以保證至少有 30 顆珠子的顏色是相同的？(三分)

解：

(1)首先，我們要指出只取出 65 顆的珠子是不夠的。

我們可以在盒子中放 47 顆藍色珠子、46 顆紅色珠子與 7 顆白色珠子，如果我們隨意從盒內取出 26 顆珠子，取出的珠子中藍色珠子與紅色珠子至少有 $26 - 7 = 19$ 顆，根據鴿籠原理，至少有 10 顆藍色珠子或至少有 10 顆紅色珠子，滿足題目條件。

在這樣的情況下，我們隨意從盒內取出 65 顆珠子，結果有可能是 29 顆藍色珠子、29 顆紅色珠子與 7 顆白色珠子，三種顏色的珠子都不到 30 顆，所以，只取出 65 顆的珠子是不夠的。

(2)再證明取出 66 顆的珠子，就可以保證：無論各種顏色的珠子如何分配，至少有 30 顆珠子的顏色是相同的。

不失一般性，我們可以假設盒子內三種顏色的珠子顆數是藍色 \geq 紅色 \geq 白色珠子。

如果盒子中白色珠子不超過 7 顆，我們隨意從盒內取出 66 顆珠子，取出的珠子中藍色珠子與紅色珠子至少有 $66 - 7 = 59$ 顆，根據鴿籠原理，至少有 30 顆藍色珠子或至少有 30 顆紅色珠子，

如果盒子中白色珠子至少有 9 顆，我們隨意從盒內取出 26 顆珠子，結果有可能是 9 顆藍色珠子、9 顆紅色珠子與 8 顆白色珠子，未滿足題目條件。

如果盒子中恰有 8 顆白色珠子，藍色珠子與紅色珠子不可能都至少有 9 顆，否則無法滿足題目條件。所以白色珠子與紅色珠子都恰有 8 顆，我們隨意從盒內取出至少 66 顆珠子，至少有 50 顆藍色珠子。

評分標準：

(1)指出必有一種顏色的珠子數量小於等於 7 $\rightarrow \frac{1}{7}$ 。

(2)指出必有一種顏色的珠子數量小於等於 7 或有二種顏色的珠子數量等於 8 $\rightarrow \frac{1}{7}$ 。

(3)指出取 66 顆珠子是足夠的 $\rightarrow \frac{2}{7}$ 。

(4)證明取 66 顆珠子是足夠的 $\rightarrow \frac{2}{7}$ 。

(5)給出例子說明取 65 顆珠子是不夠的 $\rightarrow \frac{2}{7}$ 。

3. 設 $P(x)$ 及 $Q(x)$ 均為非常數的多項式。對於每一個 x ，都有 $P(P(x)) = Q(Q(x))$ ，且 $P(P(P(x))) = Q(Q(Q(x)))$ 。請問是否能保證 $P(x) = Q(x)$ ？(四分)

解：

因為 $P(x)$ 及 $P(P(x))$ 均為非常數的多項式，它們的值域有無限多個值。

對任一個在其值域中的 x ，

令 $x = P(P(t)) = Q(Q(t))$ ，則 $P(x) = P(P(t)) = Q(Q(t)) = Q(x)$

這對無限多個值都成立，且 $Q(x)$ 與 $Q(Q(x))$ 也均為非常數的多項式，

因此對於每一個 x ，我們都有 $P(x)=Q(x)$ 。

評分標準：

(1)指出 $P(x)$ 及 $P(P(x))$ 的值域有無限多個值 $\rightarrow \frac{2}{7}$ 。

(2)指出有無限多個 x 可以使得 $P(x)=Q(x) \rightarrow \frac{3}{7}$ 。

(3)指出 $Q(x)$ 也是非常數的多項式，因此對於每一個 x ，我們都有 $P(x)=Q(x) \rightarrow \frac{2}{7}$ 。

4. 將 2004 分拆為一個或一個以上的正整數之和，且這些正整數「差不多相等」。所謂一些正整數「差不多相等」是指它們之中的任意兩個數的差等於 1 或 0。請問滿足上述條件的分拆方法共有多少種？（注意：如果分拆後的正整數都相同，但只有次序不同，視其為同一種分拆方法。）（四分）

解：

對於任意整數 $k, 1 \leq k \leq 2004$ ，利用算數定理，我們可以找到唯一的數對 (q, r) ，使得 $2004=kq+r, 0 \leq r < k$ 。

$$\underbrace{(q+1)+(q+1)+\dots+(q+1)}_{r\text{個}} + \underbrace{q+q+\dots+q}_{k-r\text{個}} = r(q+1) + (k-r)q = kq+r=2004, \text{ 即}$$

2004 可以分拆為 r 個 $(q+1)$ 與 $(k-r)$ 個 q ，且 $(q+1)$ 與 q 是「差不多相等」的正整數。

所以，對於每一個 k ，我們都可以得到一個滿足題目條件的唯一分拆方法，而 k 可以取 $1, 2, \dots, 2004$ ，所以共有 2004 種分拆方法。

評分標準：

(1)給出 5 個以上的正確分拆例子 $\rightarrow \frac{1}{7}$ 。

(2)會用 $\left\lfloor \frac{2004}{k} \right\rfloor$ 之值 $\rightarrow \frac{2}{7}$ 。

(3)會分為 r 個 $(q+1)$ 與 $(k-r)$ 個 $q \rightarrow \frac{5}{7}$ 。

(4)說明對於每一個 k ，分拆方法是唯一的 $\rightarrow \frac{2}{7}$ 。

5. 試找出滿足下列條件的所有正整數 N ：

將 $1, 2, 3, \dots, N (N>1)$ 重排，使得任意二個或二個以上的連續項之平均都不是正整數。（五分）

解：

$1+2+3+\dots+N = \frac{N(N+1)}{2} \Rightarrow \text{平均} = \frac{N(N+1)}{2N} = \frac{N+1}{2}$ 。如果 N 是奇數，平均 $\frac{N+1}{2}$ 就是正整數，不符合要求不合，所以 N 只能是偶數。

對於任一個偶數 N ，先將 $1 \sim N$ 由小到大依序排列後，從頭開始兩兩對調排列，即重排為 $2, 1, 4, 3, 6, 5, \dots, N, N-1$ 。

考慮連續 k 項的平均，其中 $2 \bullet k \bullet N$ ：

(1) 若 k 為奇數

(i) a 為偶數，連續 k 項的和為

$$a + (a-1) + (a+2) + (a+1) + \dots + (a+k-3) + (a+k-4) + (a+k-1)$$

$$= (a-1) + a + (a+1) + (a+2) + \dots + (a+k-4) + (a+k-3) + (a+k-2) + 1 = \frac{k(2a+k-3)}{2} + 1$$

$$\text{其平均為} \left[\frac{k(2a+k-3)}{2} + 1 \right] = \frac{2a+k-3}{2} + \frac{1}{k} = a + \frac{k-3}{2} + \frac{1}{k}, \quad k \text{ 為奇數} \Rightarrow \frac{k-3}{2} \text{ 為}$$

整數， $\frac{1}{k}$ 不為整數 $\Rightarrow a + \frac{k-1}{2} + \frac{1}{k}$ 不為整數，即此連續 k 項平均不為整數。

(ii) a 為奇數，連續 k 項的和為

$$a + (a+3) + (a+2) + (a+5) + (a+4) + \dots + (a+k) + (a+k-1)$$

$$= (a+1) - 1 + (a+2) + (a+3) + (a+4) + (a+5) + \dots + (a+k-1) + (a+k) = \frac{k(2a+k+1)}{2} - 1$$

$$\text{其平均為} \frac{1}{k} \left[\frac{k(2a+k+1)}{2} - 1 \right] = \frac{2a+k+1}{2} - \frac{1}{k} = a + \frac{k+1}{2} - \frac{1}{k}, \quad k \text{ 為奇數} \Rightarrow \frac{k+1}{2} \text{ 為}$$

整數， $\frac{1}{k}$ 不為整數 $\Rightarrow a + \frac{k+1}{2} - \frac{1}{k}$ 不為整數，即此連續 k 項平均不為整數。

(2) 若 k 為偶數

(i) a 為偶數，連續 k 項的和為 $a + (a-1) + (a+2) + (a+1) + \dots + (a+k-2) + (a+k-3)$

$$= (a-1) + a + (a+1) + (a+2) + \dots + (a+k-3) + (a+k-2) = \frac{k(2a+k-3)}{2}, \quad \text{其平均為}$$

$$\frac{1}{k} \left[\frac{k(2a+k-3)}{2} \right] = \frac{2a+k-3}{2} = a + \frac{k-3}{2}, \quad k \text{ 為偶數} \Rightarrow \frac{k-3}{2} \text{ 不為整數} \Rightarrow a + \frac{k-3}{2}$$

不為整數，即此連續 k 項的平均不為整數。

(ii) a 為奇數，連續 k 項的和為

$$a + (a+3) + (a+2) + (a+5) + (a+4) + \dots + (a+k-1) + (a+k-2) + (a+k+1)$$

$$= (a+1) - 1 + (a+2) + (a+3) + (a+4) + (a+5) + \dots + (a+k-2) + (a+k-1) + (a+k) + 1$$

$$= \frac{k(2a+k+1)}{2}, \quad \text{其平均為} \frac{1}{k} \left[\frac{k(2a+k+1)}{2} \right] = \frac{2a+k+1}{2} = a + \frac{k+1}{2}, \quad k \text{ 為偶數}$$

$\Rightarrow \frac{k+1}{2}$ 為整數 $\Rightarrow a + \frac{k+1}{2}$ 不為整數，即此連續 k 項的平均不為整數。

對於每一個 k ， $2 \bullet k \bullet N$ ，任意連續 k 項的平均都不是正整數，所以任意一個偶數 N 均滿足題目條件。

評分標準：

(1) 給出例子，說明 n 為偶數 ($n \bullet 6$) 時是可行的 $\rightarrow \frac{1}{7}$ 。

(2) 證明 n 不能為奇數 $\rightarrow \frac{2}{7}$ 。

(3) 證明 n 為偶數，但只考慮連續偶數項、連續奇數項、或由奇數項開始、由偶數開始 $\rightarrow \frac{2}{7}$ 。

(4) 分 k 為奇、偶數， a 為奇、偶數討論 $\rightarrow \frac{2}{7}$ 。