

# International Mathematics Tournament of Towns

## 環球城市數學競賽

2005 春季賽 國中組 初級卷 13/03/2005

※每題必須詳細寫下證明及理由，只寫答案不一定有分數。

1. 小丁與小王每天都以固定的等速分別由  $A$ 、 $B$  兩地相向而行(兩者之速度不必相同)。第一天他們在點  $X$  相遇；第二天小丁提早 30 分鐘出發，結果他們在點  $Y$  相遇，點  $Y$  在線段  $XB$  上且  $XY$  之長度為 2 公里。請問若第三天小王提早 30 分鐘出發，他們在點  $Z$  相遇，請問  $XZ$  之長度為多少公里？(三分)

### 解(一)：計算解法

假設小丁和小王第一天在相遇前分別走了  $a$  公里和  $b$  公里。因兩個人每天的速度都一樣，所以將接下來兩天所走的總路程一起考慮。第二天小丁比小王多走 30 分鐘，第三天小王比小丁多走 30 分鐘，所以兩天合計小丁和小王走的時間一樣多並且兩天總共各走了  $2a$  公里和  $2b$  公里。第二天小丁走了  $a+2$  公里，因此第三天小丁只走  $a-2$  公里，也就是說  $XZ$  的長度是 2 公里。

### 解(二)：代數解法

設  $AB$  的距離為  $a$  公里，小丁的時速為每小時  $u$  公里，小王的時速為每小時  $v$  公里。

1° 第一天兩人同時出發。若經過  $t$  時後於點  $X$  相遇，則

$$\overline{AX} = ut, \quad \overline{BX} = vt$$

由  $ut + vt = a$  可得

$$t = \frac{a}{u+v}$$

故

$$\overline{AX} = \frac{au}{u+v}, \quad \overline{BX} = \frac{av}{u+v} \quad (A)$$

2° 第二天，小丁提早半小時出發，結果兩人在距  $X$  點 2 公里的  $Y$  點相遇。因此

$$\text{「小丁由 } A \text{ 走到 } Y \text{ 的時間」} = \text{「小王由 } B \text{ 走到 } Y \text{ 的時間」} + \frac{1}{2}$$

即

$$\frac{\overline{AY}}{u} = \frac{\overline{BY}}{v} + \frac{1}{2} \quad (B)$$
$$\frac{1}{u} \left( \frac{au}{u+v} + 2 \right) = \frac{1}{v} \left( \frac{av}{u+v} - 2 \right) + \frac{1}{2}$$

可得

$$\frac{1}{u} + \frac{1}{v} = \frac{1}{4} \quad (C)$$

- 3° 第三天，小王比小丁提早半小時出發，結果兩人在 Z 點相遇。  
同 (B) 式的想法可得

$$\frac{\overline{BZ}}{v} - \frac{\overline{AZ}}{u} = \frac{1}{2} \quad (D)$$

$$\frac{1}{v}(\overline{BX} + \overline{XZ}) - \frac{1}{u}(\overline{AX} - \overline{XZ}) = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{v}\left(\frac{av}{u+v} + \overline{XZ}\right) - \frac{1}{u}\left(\frac{au}{u+v} - \overline{XZ}\right) = \frac{1}{2}$$

因  $t = \frac{a}{u+v}$ ，可知

$$\left(\frac{1}{u} + \frac{1}{v}\right)\overline{XZ} = \frac{1}{2}$$

即

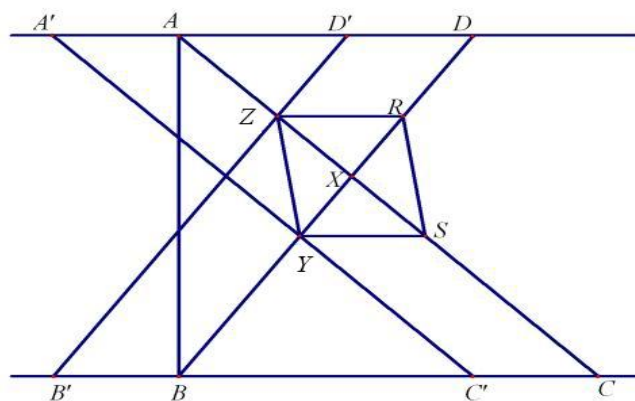
$$\overline{XZ} = 2 \quad (E)$$

### 評分標準：

01. 寫出 (A) 式，1/7 分
02. 寫出 (B) 式，2/7 分
03. 證出 (C) 式，2/7 分
04. 寫出 (D) 式，1/7 分
05. 證出 (E) 式，1/7 分
06. 由「等速」觀念做出者只給 2/7 分。
07. 因「列式概念錯誤」導出「等速」者，不給分。

### 解 (三)：幾何解法

在下圖裡，橫軸代表經過的時間而直軸代表 AB 間的距離。而線段 AC 和 BD 則可看成是小丁和小王分別從 A，B 兩地相向移動的運動，並於點 X 相遇。線段 A'C' 是小丁提早半小時出發的運動 (AA' 為半小時)，並且和線段 BD 相交於 Y，即兩人第二天的相遇位置；線段 B'D' 是小王提早半小時出發的運動 (BB' 為半小時)，並且和線段 AC 相交於 Z，即兩人第三天的相遇位置。分別從 Y，Z 兩點劃兩條平行於橫軸的線並分別交線段 AC 於 S，線段 BD 於 R。如此一來線段 ZR 與 YS 也分別代表半小時 (因 YSAA' 與 ZRBB' 皆為平行四邊形)，即  $ZR = YS$ ，所以可知 YSRZ 也是平行四邊形且 X 到線段 ZR 的距離與到線段 YS 的距離相等。由題意可知 X 到線段 YS 的距離為 2 公里而我們需求出 X 到線段 ZR 的距離，因此答案為 2 公里。



2. 令  $n$  為正整數。試證在  $n$  或  $3n$  的十進制之各位數字中，至少會出現一個數字 1、2 或 9。(四分)

### 解(一):

Case1: 當  $n$  的首位為 1, 2, 9 時, 本命題成立。

Case2: 當  $n$  的首位為 3 時,  $3n$  的首位為 9 或發生進位現象時為 1。

Case3: 當  $n$  的首位為 4, 5, 6 時,  $3n$  的首位為 1 或首位為 6 且發生進位現象時為 2。

Case4: 當  $n$  的首位為 7, 8, 9 時,  $3n$  的首位為 2。

### 評分標準:

01. 能分類處理(兩類以上), 2/7 分。分類完整, 4/7 分。

02. 討論 Case2 或 Case3 其中之一的進位狀況, 1/7 分。兩者皆討論, 3/7 分。

### 解(二):

1°  $n$  的尾數為 1, 2, 9 時, 本命題成立。

2°  $n$  的尾數為 3, 4, 7 時, 則  $3n$  的尾數為 9, 2 和 1, 本命題成立。

3°  $n$  的尾數為 5, 6 時,  $n$  的數字中有 1, 2 和 9 時, 本命題成立。

4° 若  $n=35, 45, 55, 65, 75, 85$  時,  $n$  的首位數字不是 1 就是 2, 本命題依然成立。

5° 依此方式繼續討論下去即可得證本命題。

### 評分標準:

01. 說明至 2°, 2/7 分

02. 5° 討論不完整者, 最多 4/7 分

### 解(三):

1°  $n$  中有為 1, 2, 9 時, 本命題成立。

2°  $n$  中沒有 1, 2, 9 時, 則其數值必由 0, 3, 4, 5, 6, 7, 8 所組成。

此時有以下 2 方法可得本命題:

#### Way1

從  $n$  的首位數來觀察:

Case1: 當  $n$  的首位為 3 時,  $3n$  的首位為 9 或發生進位現象時為 1

Case2: 當  $n$  的首位為 4 和 5 時,  $3n$  的首位為 1

Case3: 當  $n$  的首位為 6 時,  $3n$  的首位為 1 或發生進位現象時為 2

Case4: 當  $n$  的首位為 7, 8 時,  $3n$  的首位為 2。

#### Way2

因  $n$  中沒有 1, 2 和 9, 可設  $n=ax10^k+b$ , 其中  $a, b$  是 0, 3, 4, 5, 6, 7 或 8, 且  $a \neq 0$ 。

則  $3n=3ax10^k+3b$ , 且  $0 \leq 3b < 27 \times 10^k$

此時  $9 \times 10^k \leq 3n < 27 \times 10^k$

即  $3n$  的首位為 9 或 1 或 2, 得證本命題。

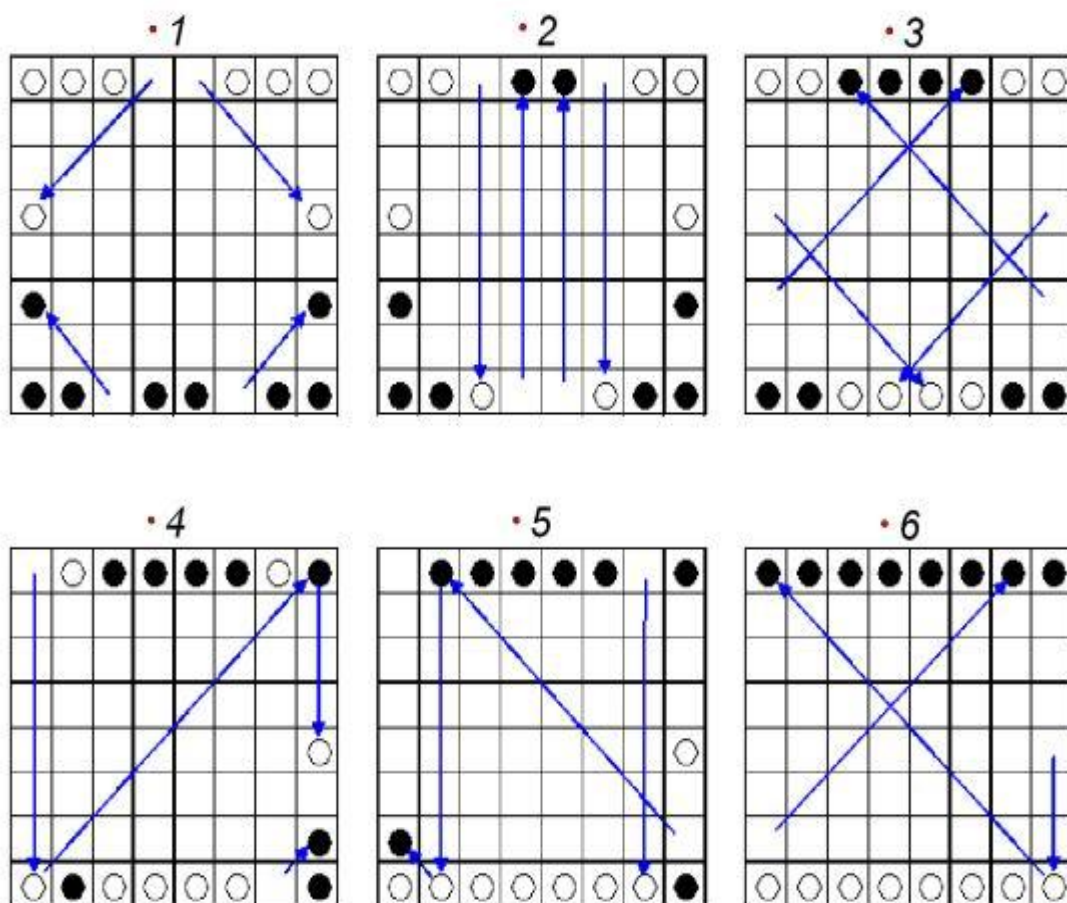
### 評分標準：

01. 說明至 2°, 2/7 分。
02. Way1 討論不完整者, 3/7 分；完整者, 5/7 分。
03. Way2 說明完整者, 5/7 分。

3. 在 8×8 的西洋棋盤的第一列的格子有 8 個完全相同的黑色皇后；在最後一列上有 8 個完全相同的白色皇后，雙方輪流每次移動一個皇后。欲將黑色皇后及白色皇后互相交換位置，請問至少要移動多少次？(註：白色皇后和黑色皇后的移動規則是：在沒有阻擋下每次可朝水平、鉛直或對角線的某一個方向移動任意多格。每個格子上至多只能放置一個皇后。)(五分)

### 解：

下圖是移動 23 次就完成的方法：



接下來驗證 23 次為最少的次數。16 個皇后每個至少移動一次共 16 次。而中間每一列兩端的皇后最多只有 1 個皇后能移動一次就到對面，所以至少有 6 個皇后需要移動二次以上。在角落上的 4 個皇后中，最多有 3 個皇后可以一次到對面，因此至少 1 個皇后需要移動二次。故最少需  $16+6+1 = 23$  次。

4. 在正方形  $ABCD$  中，點  $M$ ， $N$  分別為  $BC$  邊及  $AD$  邊的中點。在對角線  $CA$  靠近點  $A$  的延長線上取一點  $K$  (點  $K$  在正方形外部)。連接線段  $KM$  交  $AB$  邊於點  $L$ 。試證  $\angle KNA = \angle LNA$ 。(五分)

**解：**

如圖，延長  $BA$  與  $KN$  交於  $P$  點。

若證出  $\triangle NAL$  與  $\triangle NAP$  全等，

即可證出  $\angle LNA = \angle KNA$ 。

1° 連  $MN$  與  $AC$  交於  $O$ ，則  $O$  點是正方形  $ABCD$  的對稱中心，即

$$\overline{OM} = \overline{ON} \quad (\overline{KO} \text{ 為 } \triangle KMN \text{ 之中線})$$

2° 因  $LP \parallel MN$ ，由  $\frac{\overline{AP}}{\overline{ON}} = \frac{\overline{KA}}{\overline{KO}} = \frac{\overline{AL}}{\overline{OM}}$

可得

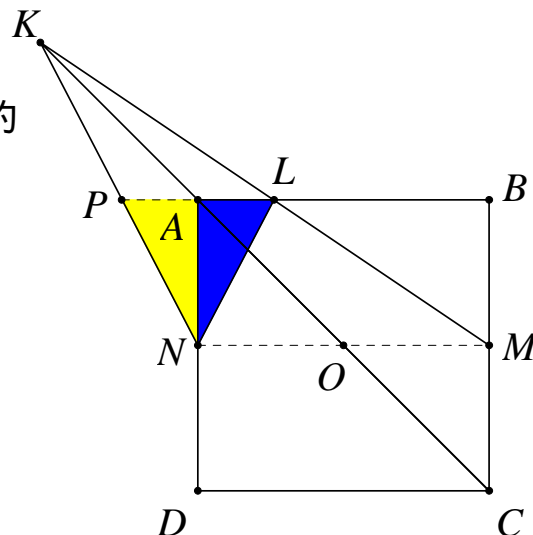
$$\frac{\overline{AP}}{\overline{AL}} = \frac{\overline{ON}}{\overline{OM}} = 1 \quad \text{即 } \overline{AP} = \overline{AL}$$

3° 在  $\triangle NAL$  與  $\triangle NAP$  中，

$$\begin{aligned} \overline{NA} &\perp \overline{LP} \\ \overline{AP} &= \overline{AL} \\ \overline{AN} &= \overline{AN} \end{aligned}$$

可得  $\triangle NAL$  與  $\triangle NAP$  全等

即  $\angle LNA = \angle KNA$ 。



**評分標準：**

01. 說明  $\overline{OM} = \overline{ON}$ ，1/7 分

02. 證明  $\overline{AP} = \overline{AL}$ ，5/7 分

03. 說明  $\triangle NAL$  與  $\triangle NAP$  全等，即  $\angle LNA = \angle KNA$ ，1/7 分

5. 一個非常大的城市，它的所有街道都是東西向或是南北向(如棋盤式)。小朱從此城市的點  $P$  車頭朝北開始駕車，最後回到點  $P$  車頭仍然朝北。在路程中除了開始及最後各經過點  $P$  一次外，其他任何地點都沒有通過兩次或兩次以上。若路程中小朱共作了 100 次左轉，請問他至少必須右轉幾次？(五分)

**解：**

由題意可將車子所行經的路徑視為一個封閉且本身不相交的曲線。因為車頭方向不變且回到  $P$  點，故可將車子看成是以順時鐘方向或逆時鐘方向旋轉  $360^\circ$ 。若是以逆時鐘方向旋轉，則右轉次數比左轉次數少 4 次，即 96 次；若是以順時鐘方向旋轉，則右轉次數比左轉次數多 4 次，即 104 次。

《成績是取最高得分三題的總和，考試時間四小時。》