

International Mathematics Tournament of Towns

環球城市數學競賽

2005 春季賽 高中組 初級卷 13/03/2005

※每題必須詳細寫下證明及理由，只寫答案不一定有分數。

1. 有四個形如 $f(x)=x^2+ax+b$ 的一元二次函數，其中 $a、b$ 為實數，將這四個函數的圖形繪在座標平面上。已知沒有三個或三個以上的圖形共同交於一點，且所有這些圖形的交點共有 4 個。試證這 4 個交點的橫坐標中最大值與最小值之和等於其它二個橫坐標之和。(三分)

解：

- 1° 設 $y = x^2 + Ax + B$ 為兩拋物線
 $y = x^2 + ax + b$

若 $A \neq a$ ，則兩拋物線交點的橫座標為

$$\begin{aligned} x^2 + Ax + B &= x^2 + ax + b \\ x &= \frac{b - B}{A - a} \end{aligned}$$

由此可知，若 $A \neq a$ 則兩拋物線恰有一交點

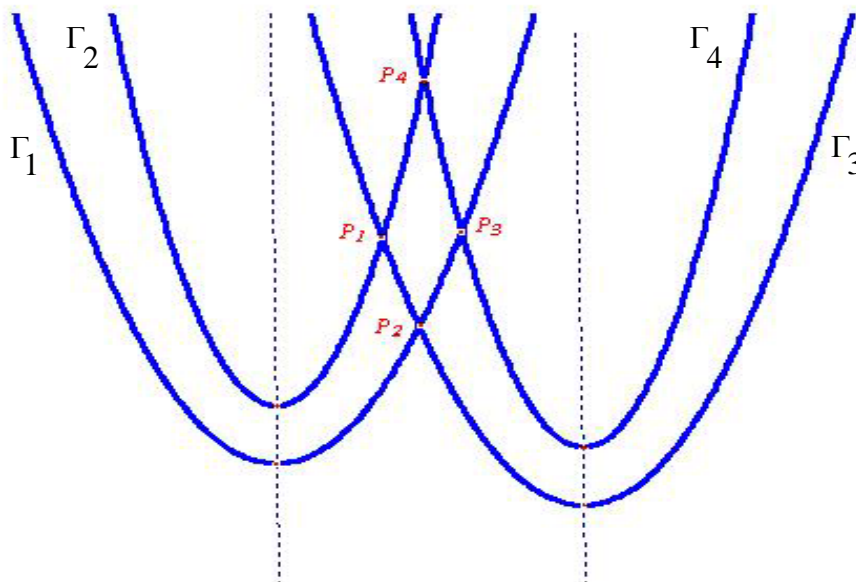
- 2° 設 $\Gamma_i: y = x^2 + a_i x + b_i, i = 1, 2, 3, 4$ 為四拋物線且 $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq a_4$ 。

若 a_i 全不相同，則會有 $C_2^4 = 6$ 個交點。

因此，若欲使此四拋物線恰有四個交點必須 $a_1 = a_2 < a_3 = a_4$ 。

不妨設 $b_1 < b_2$ ， $b_3 < b_4$ 。

如下圖：



3° 不失一般性的假設 Γ_2 與 Γ_3 的交點， Γ_1 與 Γ_4 的交點的橫座標為四個交點的橫座標中的最小與最大值以 x_1, x_4 表示，而 Γ_1 與 Γ_3 的交點， Γ_2 與 Γ_4 的交點的橫座標分別以 x_2, x_3 表示。這樣有以下關係式：

$$x_1 < x_2 < x_4$$

$$x_1 < x_3 < x_4$$

此時

$$x_1 = \frac{b_3 - b_2}{a_1 - a_3} \quad x_4 = \frac{b_4 - b_1}{a_1 - a_3}$$

$$x_2 = \frac{b_3 - b_1}{a_1 - a_3} \quad x_3 = \frac{b_4 - b_2}{a_1 - a_3}$$

或

$$x_1 = \frac{b_3 - b_2}{a_1 - a_3} \quad x_4 = \frac{b_4 - b_1}{a_1 - a_3}$$

$$x_2 = \frac{b_4 - b_2}{a_1 - a_3} \quad x_3 = \frac{b_3 - b_1}{a_1 - a_3}$$

即可算出

$$x_1 + x_4 = \frac{b_3 + b_4 - b_1 - b_2}{a_1 - a_3} = x_2 + x_3$$

評分標準：

01. 僅畫出四個交點的示意圖，1/7 分

02. 說明若 $A \neq a$ ，則兩拋物線交點的橫座標為 $x = \frac{b-B}{A-a}$ ，1/7 分

03. 再由 02. 得到若 $A \neq a$ 則兩拋物線恰有一交點，1/7 分

04. 說明 $a_1 = a_2 < a_3 = a_4$ 與假設 $b_1 < b_2, b_3 < b_4$ ，1/7 分

05. 畫出正確圖形，1/7 分

06. 得到 x_i 與 a_i, b_i 間的關係式，1/7 分

07. 驗證 $x_1 + x_4 = x_2 + x_3$ ，1/7 分

2. 將所有十進制的正整數依序寫在一條無限長的紙帶上：12345678910111213... (中間無間斷)，然後將紙帶依每 7 個數字長剪成小段紙片，例如 1234567，8910111，2131415，16.....。令 a 為任意一個七位數的正整數，試證：

(1) 至少有一張小紙片上出現的數為 a ；(三分)

(2) 有無限多張小紙片上出現的數都為 a 。(一分)

解：

(1) 考慮以下 7 個連續的八位數：

$$10a, 10a+1, 10a+2, 10a+3, 10a+4, 10a+5, 10a+6.$$

當我們按題意將這 7 個數依序寫在紙帶上並以 7 個數字為一組剪開時，由於 7 和 8 互質，無論從何處開始剪開都必有一段紙片出現 a 。

(2) 同理，當我們考慮 $100a, 100a+1, 100a+2, 100a+3, 100a+4, 100a+5, 100a+6$ 這 7 個連續的九位數， $1000a, 1000a+1, 1000a+2, 1000a+3, 1000a+4, 1000a+5, 1000a+6$ 這 7 個連續的十位數，以及所有 7 個同樣型態連續的 n 位數 (n 和 7 互質) 時，以 (1) 的方法都至少可以得到一張寫著 a 的紙片，因此有無限多張小紙片上出現的數都為 a 。

3. 在正方形 $ABCD$ 中，點 M, N 分別為 BC 邊及 AD 邊的中點。在對角線 CA 靠近點 A 的延長線上取一點 K (點 K 在正方形外部)。連接線段 KM 交 AB 邊於點 L 。試證 $\angle KNA = \angle LNA$ 。(四分)

解：

如圖。

延長 BA 與 KN 交於 P 點。

若證出 $\triangle NAL$ 與 $\triangle NAP$ 全等，
即可證出 $\angle LNA = \angle KNA$ 。

- 1° 連 MN 與 AC 交於 O ，則 O 點是正方形 $ABCD$ 的對稱中心，即

$$\overline{OM} = \overline{ON} \quad (\overline{KO} \text{ 為 } \triangle KMN \text{ 之中線})$$

- 2° 因 $LP \parallel MN$ ，由 $\frac{\overline{AP}}{\overline{ON}} = \frac{\overline{KA}}{\overline{KO}} = \frac{\overline{AL}}{\overline{OM}}$

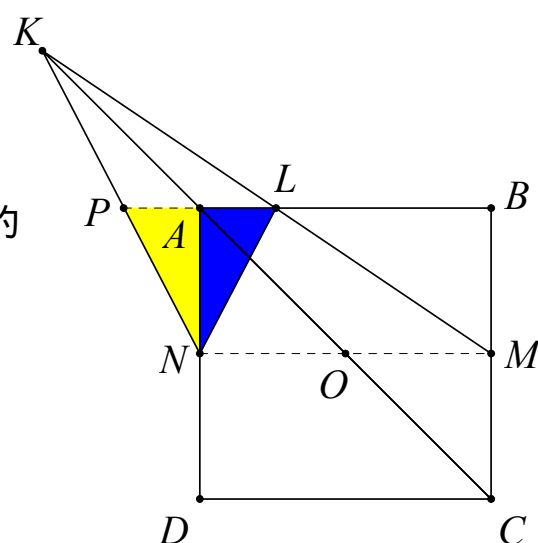
可得

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{AL}} = \frac{\overline{ON}}{\overline{OM}} = 1 \quad \text{即} \quad \overline{AP} = \overline{AL}$$

- 3° 在 $\triangle NAL$ 與 $\triangle NAP$ 中，

$$\begin{aligned} \overline{NA} &\perp \overline{LP} \\ \overline{AP} &= \overline{AL} \\ \overline{AN} &= \overline{AN} \end{aligned}$$

可得 $\triangle NAL$ 與 $\triangle NAP$ 全等
即 $\angle LNA = \angle KNA$ 。



評分標準：

01. 說明 $\overline{OM} = \overline{ON}$ ，1/7 分

02. 證明 $\overline{AP} = \overline{AL}$ ，5/7 分

03. 說明 $\triangle NAL$ 與 $\triangle NAP$ 全等，即 $\angle LNA = \angle KNA$ ，1/7 分

4. 一個非常大的城市，它的所有街道都是東西向或是南北向(如棋盤式)。小朱從此城市的點 P 車頭朝北開始駕車，最後回到點 P 車頭仍然朝北。在路程中除了開始及最後各經過點 P 一次外，其他任何地點都沒有通過兩次或兩次以上。若路程中小朱共作了 100 次左轉，請問他至少必須右轉幾次？(四分)

解：

由題意可將車子所行經的路徑視為一個封閉且本身不相交的曲線。因為車頭方向不變且回到 P 點，故可將車子看成是以順時鐘方向或逆時鐘方向旋轉 360° 。若是以逆時鐘方向旋轉，則右轉次數比左轉次數少 4 次，即 96 次；若是以順時鐘方向旋轉，則右轉次數比左轉次數多 4 次，即 104 次。

5. 已知若干個正實數的和等於 10，它們的平方和大於 20。試證它們的立方和大於 40。(五分)

解：

由柯西不等式

$$\begin{aligned} & \left(\sqrt{a_1^2} + \sqrt{a_2^2} + \cdots + \sqrt{a_n^2} \right) \left(\sqrt{a_1^3} + \sqrt{a_2^3} + \cdots + \sqrt{a_n^3} \right) \\ & \geq \left(\sqrt{a_1} \sqrt{a_1^3} + \sqrt{a_2} \sqrt{a_2^3} + \cdots + \sqrt{a_n} \sqrt{a_n^3} \right)^2 \\ & = (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)^2 \end{aligned}$$

即

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)(a_1^3 + a_2^3 + \cdots + a_n^3) \geq (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)^2$$

又因

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + \cdots + a_n &= 10 \\ a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 &> 20 \end{aligned}$$

所以

$$10(a_1^3 + a_2^3 + \cdots + a_n^3) > 20^2 = 400$$

即

$$a_1^3 + a_2^3 + \cdots + a_n^3 > 40$$

評分標準：

01. 知道柯西不等式，2/7 分

02. 驗證 $(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)(a_1^3 + a_2^3 + \cdots + a_n^3) \geq (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)^2$ ，3/7 分

03. 說明 $a_1^3 + a_2^3 + \cdots + a_n^3 > 40$ ，2/7 分

《成績是取最高得分三題的總和，考試時間四小時。》