

# International Mathematics Tournament of Towns

## 環球城市數學競賽

2006 秋季賽 國中組 初級卷 2006/10/22

※每題必須詳細寫下證明及理由，只寫答案不一定有分數。

1. 任意正整數  $x$ 、 $y$ ，其中  $x \leq y$ ，將  $x$  寫在黑板之左側，將  $y$  寫在黑板之右側。

小王對黑板上的兩個數依序進行以下之操作：

(1) 將  $x^2$  寫在筆記本上；

(2) 將黑板左側的數替換成  $x$  與  $y-x$  中較小（或相等）者，將黑板右側的數替換成  $x$  與  $y-x$  中較大（或相等）者。

小王繼續上述操作，直到黑板上出現一個數等於 0 為止。請問最後小王筆記本上所寫下的數的總和是多少？（四分）

參考解法 1：

由題意，筆記本上的數的總和為曾經出現在黑板左側的數的平方和，且可以觀察出若黑板左側的數為黑板左側的數字的兩倍或兩倍以上，則經過一次操作後黑板右側的數仍然不變。因  $x \leq y$ ，可利用輾轉相除法得知

$$y = a_1x + r_1, \text{ 其中 } 1 \leq a_1, 0 \leq r_1 < x, a_1, r_1 \in \mathbb{N};$$

$$x = a_2r_1 + r_2, \text{ 其中 } 1 \leq a_2, 0 \leq r_2 < r_1, a_2, r_2 \in \mathbb{N};$$

$$r_1 = a_3r_2 + r_3, \text{ 其中 } 1 \leq a_3, 0 \leq r_3 < r_2, a_3, r_3 \in \mathbb{N};$$

⋮

$$r_{n-2} = a_nr_{n-1} + r_n, \text{ 其中 } 1 \leq a_n, 0 \leq r_n < r_{n-1}, a_n, r_n \in \mathbb{N};$$

$$r_{n-1} = a_{n+1}r_n, \text{ 其中 } 1 \leq a_{n+1}, a_{n+1} \in \mathbb{N}.$$

因  $y = a_1x + r_1 = \underbrace{x + x + \cdots + x}_{a_1 \text{ 個}} + r_1$ ，可知  $x$  被寫在黑板左側  $a_1$  次；

$x = a_2r_1 + r_2 = \underbrace{r_1 + r_1 + \cdots + r_1}_{a_2 \text{ 個}} + r_2$ ，可知  $r_1$  被寫在黑板左側  $a_2$  次；

$r_1 = a_3r_2 + r_3 = \underbrace{r_2 + r_2 + \cdots + r_2}_{a_3 \text{ 個}} + r_3$ ，可知  $r_2$  被寫在黑板左側  $a_3$  次；

⋮

$$r_{n-1} = a_{n+1}r_n = \underbrace{r_n + r_n + \cdots + r_n}_{a_{n+1} \text{ 個}}.$$

所以筆記本上的數的總和為  $a_1x^2 + a_2r_1^2 + a_3r_2^2 + \cdots + a_nr_{n-1}^2 + a_{n+1}r_n^2$ ：

$$\begin{aligned} & a_1x^2 + a_2r_1^2 + a_3r_2^2 + \cdots + a_nr_{n-1}^2 + a_{n+1}r_n^2 \\ &= a_1x^2 + a_2r_1^2 + a_3r_2^2 + \cdots + (a_nr_{n-1}^2 + r_{n-1}r_n) \\ &= a_1x^2 + a_2r_1^2 + a_3r_2^2 + \cdots + r_{n-1}(a_nr_{n-1} + r_n) \\ &= a_1x^2 + a_2r_1^2 + a_3r_2^2 + \cdots + r_{n-1}r_{n-2} \\ & \quad \vdots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= a_1x^2 + a_2r_1^2 + r_1r_2 \\
&= a_1x^2 + r_1(a_2r_1 + r_2) \\
&= a_1x^2 + r_1x \\
&= x(a_1x + r_1) \\
&= xy
\end{aligned}$$

故筆記本上的數的總和為  $xy$ 。

參考解法 2：

小王筆記本上所寫的數的總和為原來所寫二數之乘積。我們可針對直到黑板上出現一個數等於 0 為止的操作次數作數學歸納法。

令  $n$  為黑板上出現一個數等於 0 為止的總操作次數。

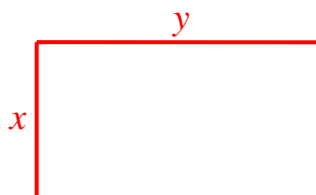
當  $n=1$  時，此二數必須相等，小王筆記本上所寫的數也就是此二數之乘積。

假設  $n=k$  時成立。

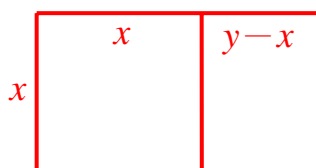
當  $n=k+1$  時，假設黑板上原來所寫之二數為  $x$ 、 $y$ ，且  $x < y$ ，經由第一次操作，小王在筆記本上所寫下的數為  $x^2$ ，在黑板上的數換成  $x$  與  $y-x$ 。此時到操作完畢還需操作  $k$  次，而根據歸納假設，由此時到操作結束時筆記本上所寫的數的總和為  $x(y-x)$ 。因此小王筆記本上所寫的數的總和為  $x^2 + x(y-x) = xy$ ，得證。

參考解法 3：(根據新竹實驗中學江盛浩同學的解法)

每一次黑板上出現的兩個正整數  $x$ 、 $y$ ，其中  $x \leq y$ ，可視為一個長方形的長與寬：



操作一次可看成是將該長方形剪去一塊以短邊為邊長的正方形：



而筆記本上的數值即為剪去正方形的面積。當黑板上出現數字為 0 時，即代表已經將原先的長方形剪完了，此時筆記本上的數值的總和就是原長方形的面積  $xy$ 。

<評分標準>

1. 有歸納動作，結果正確，給 2/7 分。
2. (i) 每次操作後，筆記本上的數之和與黑板上兩數之積的和恆為  $xy$ ，給 5/7 分。  
(ii)  $x$ 、 $y$  為有限正整數，由除法原理可知有限次後必結束，給 7/7 分。

2. 說謊者恒說謊話，誠實者恒說真話，奸詐者有時說謊話有時說真話。只允許您提出一些是非題，要求對方回答「是」或「否」(例如：此人是奸詐者嗎?)。

(a) 有三人站在您面前，已知其中一人為說謊者，一人為誠實者，另一人為奸詐者。他們彼此都確知對方的身份，請問您該如何問才可以確認每一個人的身份？(一分)

(b) 有四人站在您面前，已知其中一人為說謊者，一人為誠實者，另二人為奸詐者，他們彼此都確知對方的身份。試證：兩位奸詐者有辦法透過事先商議如何回答您的提問，使您無法確認每一個人的身份。(三分)

參考解法：

(a) 同時問三人「你是否為奸詐者？」，此時由條件可知誠實者與說謊者答案永遠相反，故至少都會有一個答案為「是」以及至少會有一個答案為「否」。若只有一個人回答「是」，因為誠實者必回答「否」，所以可確定此人必為說謊者，接著只要問說謊者有關其餘二人的身份，即可得知每一個人的身份；若只有一個人回答「否」，因為說謊者必回答「是」，所以可確定此人必為誠實者，接著只要問誠實者有關其餘二人的身份，即可得知每一個人的身份。

(b) 只要兩位奸詐者事先商議，第一位奸詐者裝扮成自己是誠實者，而把原來誠實者視為奸詐者；第二位奸詐者裝扮成自己是說謊者，而把原來說謊者視為奸詐者。即，當所問的問題不涉及裝扮者和被裝扮者時，奸詐者的回答都與被裝扮者的回答相同；當所問的問題涉及裝扮者和被裝扮者時，奸詐者的回答必須與被裝扮者的回答不相同。

由於角色互相混淆，如此便無法區分這四個人的身份。

<評分標準>

(a) (1) 問一個能確定是否之「好問題」：

你是奸詐者嗎？(誠：H，謊：L，奸：S)

H L S

× ○ ○ ..... (A)

× ○ × ..... (B)

討論至此，2/7 分

(2) (A) 時：確定誠實者 H，再問 H 另一人是否為奸詐者，回答○，該人即為 S，若回答×則該人即為 L。

得到此結論再給 2/7 分。

(3) (B) 時：確定說謊者 L，再問 L 另一人是否為奸詐者，回答○，該人即為 H，若回答×則該人即為 S。

得到此結論再給 2/7 分。

以上討論全部完整，7/7 分。

(b) (1) 區隔出 A 組：H、S<sub>1</sub> 及 B 組：L、S<sub>2</sub> 兩組，當問及不關同組之問題，S<sub>1</sub> 將自己想成 H，S<sub>2</sub> 將自己想成 L。討論至此，得 4/7 分。

(2) 當問及彼此相關的問題，如 A 組 H、S<sub>1</sub>，問你是 H 嗎？若 H、S<sub>1</sub> 都回

答○，則不合題意，故  $S_1$  必須將自己想成  $H$  之反向答案。討論至此，得 3/7 分。

3. (a) 在黑板上任意寫下 2007 個大於 1 的正整數。試證：您必定可以擦掉黑板上的某一個數，使得剩下的 2006 個數的乘積可表示為  $a^2 - b^2$ ，其中  $a$ 、 $b$  為正整數。(二分)

(b) 在黑板上有 2007 個大於 1 的正整數，其中一個數為 2006，且已知這 2007 個數中恰好只能找到一個數，使得擦去這個數後剩下的 2006 個數的乘積可以表示為  $a^2 - b^2$ ，其中  $a$ 、 $b$  為正整數。試證：這個唯一的數是 2006。(二分)

參考解法：

$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ ，因  $a-b$  與  $a+b$  同奇或同偶，故  $a^2 - b^2$  為奇數或 4 的倍數。若一個數可寫成  $4n$  的型態（即 4 的倍數），則有  $4n = (n+1)^2 - (n-1)^2$ ；若一個數可寫成  $2n+1$  的型態（即奇數），則有  $2n+1 = (n+1)^2 - n^2$ 。所以一個數能否表示成  $a^2 - b^2$  的充分必要條件是這個數是否為奇數或 4 的倍數。

(a) 1. 若 2007 個數全為奇數，則任意擦去一個數後所剩的 2006 個數的乘積為奇數，故可表示為  $a^2 - b^2$ 。

2. 若 2007 個數中只有一個偶數且此數不為 4 的倍數，則擦去這唯一的偶數後所剩的 2006 個數的乘積為奇數；若 2007 個數中只有一個偶數且此數為 4 的倍數，則任意擦去一個數後所剩的 2006 個數的乘積為奇數或 4 的倍數，故可表示為  $a^2 - b^2$ 。

3. 若 2007 個數中只有兩個偶數，則任意擦去一個奇數後所剩的 2006 個數的乘積為 4 的倍數，故可表示為  $a^2 - b^2$ 。

4. 若 2007 個數中有超過兩個偶數，則任意擦去一個數後所剩的 2006 個數的乘積仍為 4 的倍數，故可表示為  $a^2 - b^2$ 。

(b) 由(a)可知，若恰好只能找到一個數，使得擦去這個數後剩下的 2006 個數的乘積可以表示為  $a^2 - b^2$ ，則這 2007 個數中恰只有一個偶數且此數不為 4 的倍數，必須擦去這個偶數。因此這個唯一的數是 2006。

<評分標準>

(a) (1) 得出一個數能否表示成  $a^2 - b^2$  的充分必要條件是這個數是否為奇數或 4 的倍數，給 3/7 分。

(2) 正確討論  $4n+2$  型偶數一個、二個的情況，各給 3/7 分。

(b) (1) 得出 2006 是  $4n+2$  型的偶數，給 2/7 分。

(2) 會運用(a)的結果進行推論，再給 5/7 分。

4. 在三角形  $ABC$  中，延長射線  $CB$  至點  $B'$ ，使得  $BB' = AB$ 。設  $\angle B$  及  $\angle C$  的外角平分線交於點  $M$ ，試證：點  $A$ 、 $B'$ 、 $M$  及  $C$  四點共圓。(四分)

參考解法：

$$\because BB' = AB ; BM = BM$$

$$\angle B'BM = \angle ABM$$

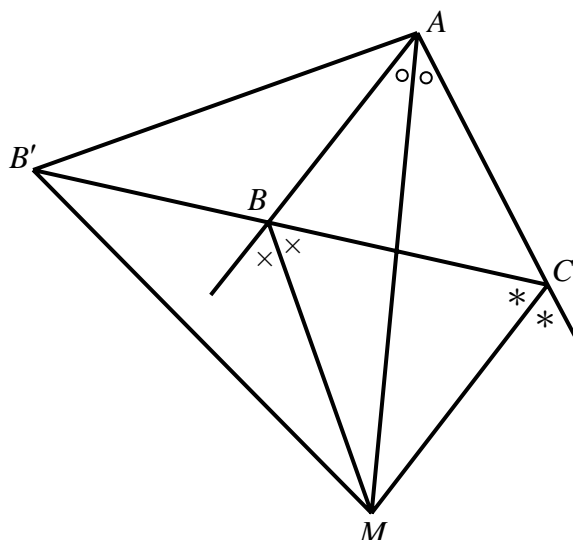
$$\therefore \triangle B'BM \cong \triangle ABM \text{ (SAS)}$$

$$\therefore \angle CB'M = \angle BAM \text{ (對應角)}$$

點  $M$  為旁心故  $\angle BAM = \angle CAM$

$$\therefore \angle CAM = \angle BAM = \angle CB'M$$

故點  $A$ 、 $B'$ 、 $M$  及  $C$  四點共圓。



<評分標準>

1 說明  $M$  為旁心， $AM$  平分  $\angle CAB$ ，3/7。

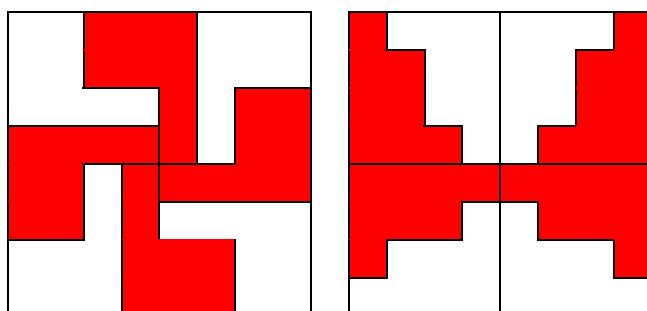
2 證明  $\triangle ABM \cong \triangle BB'M$ ，3/7。

3 說明  $A$ 、 $B'$ 、 $M$ 、 $C$  共圓，1/7。

5. 將一個正方形切割為  $n$  個全等的非凸多邊形，使得這些多邊形的每一個邊都平行於正方形的邊，且任兩個多邊形都無法經由平移與另一個多邊形重合。請問可能的  $n$  值最大者為何？（註：連接多邊形內任意二點之線段，若仍全部落在多邊形之內部，則稱此多邊形為凸多邊形。）（四分）

參考解法：

因正方形有 4 條對稱軸，故每一個邊都與正方形的邊平行的多邊形最多只能有 8 個定向，即全等之非凸多邊形最多只能有 8 個，否則就會有兩個多邊形可經由平移與另一個多邊形重合。右圖是兩組 8 個非凸多邊形的例子：



<評分標準>

1° 做出 4 個正確之圖，1/7 分

2° 做出 8 個正確之圖，3/7 分

說明最多 8 個，2/7 分

證明最多 8 個，2/7 分