

International Mathematics Tournament of Towns

環球城市數學競賽

2006 秋季賽 高中組 高級卷 29/10/2006

※每題必須詳細寫下證明及理由，只寫答案不一定有分數。

1. 每當小金遇到一個人，他都試圖瞭解誰與誰彼此之間互相認識。爲了記錄這些關係，他畫了一個圓，每個人用一條弦代表，並且使二個互相認識的人所代表的弦相交（可能相交於端點），若二人互不認識則其所代表的弦互不相交。小金認爲對於任何公司裡的人員，他都可以用這項的方式做紀錄。請問小金的想法正確嗎？(四分)

<參考解法>

小金說法不正確。令 a 、 b 、 c 互不相識， d 與 a 、 b 、 c 都相識。不失一般性，可用下圖表示：當 e 只與 a 、 b 認識， f 只與 b 、 c 認識， g 只與 a 、 c 認識，則 e 、 f 、 g 至少有一個無法用此方式做紀錄。

證明：

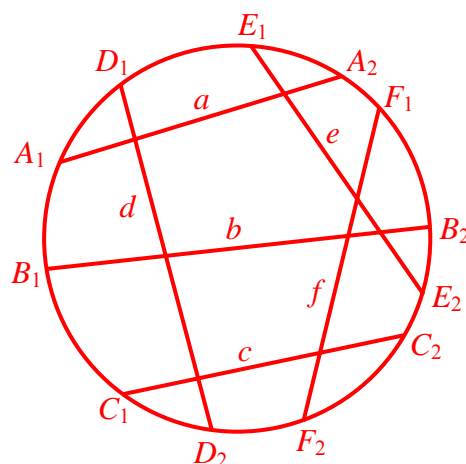
假設 e 只與 a 、 b 認識， f 只與 b 、 c 認識。

若令弦 e 的兩個端點分別為 E_1 、 E_2 ，因 e 與 a 、 b 認識，不失一般性地可令 E_1 與 A_1A_2 在 b 之同側，則 E_2 與 A_1A_2 在 b 之異側。

令弦 f 的兩個端點分別為 F_1 、 F_2 ，因 f 與 b 、 c 認識，不失一般性地可令 F_2 與 C_1C_2 在 b 之同側，則 F_1 與 C_1C_2 在 b 之異側。

令弦 g 的兩個端點分別為 G_1 、 G_2 ，因 g 與 a 、 c 認識，不失一般性地可令 G_1 與 A_1A_2 在 c 之同側，即 G_1 與 A_1A_2 在 b 之同側，而 G_2 與 A_1A_2 在 c 之異側，即 G_2 與 A_1A_2 在 b 之異側。

此時 g 與 b 相交，即 g 與 b 也認識，與 g 只認識 a 、 c 矛盾，故小金說法不正確。

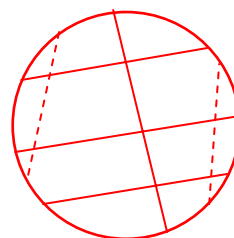


<評分標準>

Type I

1° 先讓一人與互不相識的三人相識（需證明僅一種畫法）

2° 再讓互不相識的三人，其中兩人只與另外的人相識，則此種情形無法畫出。



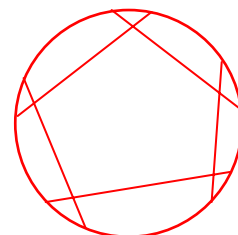
Type II

1° ABCDE 五人只與相鄰的人認識（A 與 E、B 識，E 與 D、A 識）

2° 第六人若與 A、B、C、D、E 均認識也無法畫出。

舉出例子得 3/7 分。

但若若要得 7/7 分，需討論完整可能之畫法，說明在各種畫法下無法完成。



2. 已知三角形 ABC 為銳角三角形，分別在邊 BC 、 AC 和 AB 上取點 A_1 、 B_1 和 C_1 ，使得射線 AA_1 、 BB_1 和 CC_1 分別為三角形 $A_1B_1C_1$ 的角平分線。試證線段 AA_1 、 BB_1 和 CC_1 為三角形 ABC 的三條高。(六分)

<參考解法>

令 $B_1C_1 = a$ 、 $C_1A_1 = b$ 、 $A_1B_1 = c$ 以及 I 為 $\triangle A_1B_1C_1$ 的內心。

- 1° 對 $\triangle B_1IF$ 而言，直線 BC 交其各邊之延長線，由孟式定理可得：

$$\frac{B_1B}{BI} \times \frac{IC}{CF} \times \frac{FA_1}{A_1B_1} = 1 \dots\dots\dots (1)$$

又由角平分線 C_1F 可知 $\frac{FB_1}{FA_1} = \frac{a}{b}$ ，即得 $\frac{A_1B_1}{FA_1} = \frac{a+b}{b}$ ，

代入 (1) 式得

$$\frac{IC}{CF} = \frac{BI}{B_1B} \times \frac{a+b}{b} \dots\dots\dots (I)$$

- 2° 對 $\triangle A_1IE$ 而言，直線 AB 交其各邊之延長線，由孟式定理可得：

$$\frac{A_1A}{AI} \times \frac{IB}{BE} \times \frac{EC_1}{C_1A_1} = 1 \dots\dots\dots (2)$$

又由角平分線 B_1E 可知 $\frac{EA_1}{EC_1} = \frac{c}{a}$ ，即得 $\frac{C_1A_1}{EC_1} = \frac{a+c}{a}$ ，代入 (2) 式得

$$\frac{A_1A}{AI} = \frac{BE}{IB} \times \frac{a+c}{a} \dots\dots\dots (II)$$

- 3° 對 $\triangle A_1IF$ 而言，直線 AC 交其各邊之延長線，由孟式定理可得：

$$\frac{A_1A}{AI} \times \frac{IC}{CF} \times \frac{FB_1}{B_1A_1} = 1 \dots\dots\dots (3)$$

將 (I)、(II) 代入 (3) 式得

$$\frac{BE}{IB} \times \frac{a+c}{a} \times \frac{BI}{B_1B} \times \frac{a+b}{b} \times \frac{a}{a+b} = 1$$

$$\text{故得 } \frac{BE}{B_1B} = \frac{b}{a+c}$$

- 4° $\triangle A_1B_1E$ 中， $\frac{A_1B_1}{A_1E} = \frac{c}{\frac{c}{a+c} \times b} = \frac{a+c}{b}$ 。

- 5° 由 3° 與 4° 可知 $\frac{A_1B_1}{A_1E} = \frac{BB_1}{BE}$ ，即 A_1B 為 $\angle B_1A_1C_1$ 的外角平分線，所以

$$\angle C_1A_1B = \angle B_1A_1C$$

因此 $\angle AA_1B = \angle AA_1C = 90^\circ$ ，即 AA_1 與 BC 垂直。

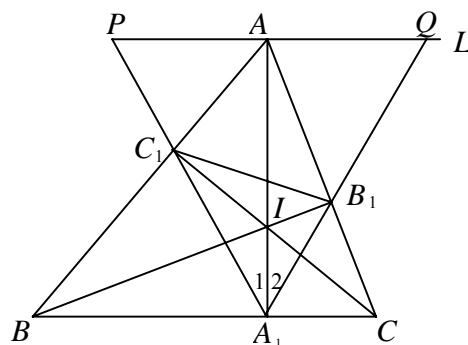
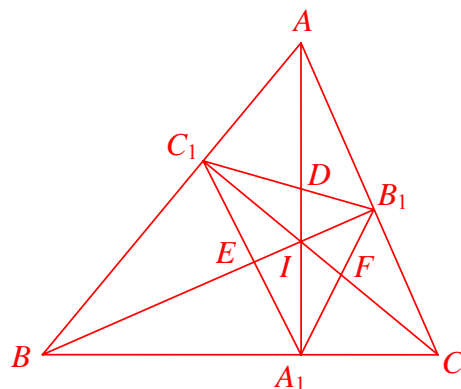
- 6° 同理可證， BB_1 與 CA 垂直、 CC_1 與 AB 垂直，因此 I 為 $\triangle ABC$ 的垂心。

<評分標準>

過 A 作直線 $L \parallel \overline{BC}$ ，延長 $\overline{A_1C_1}$ 、 $\overline{A_1B_1}$ 交直線 L 於 P 、 Q ，

$\therefore \overline{AA_1}$ 、 $\overline{BB_1}$ 、 $\overline{CC_1}$ 分別為 $\triangle A_1B_1C_1$ 之角平分線

$\therefore \overline{AA_1}$ 、 $\overline{BB_1}$ 、 $\overline{CC_1}$ 共點，由 Ceva 定理 知



$$\frac{\overline{AB_1}}{\overline{B_1C}} \times \frac{\overline{CA_1}}{\overline{A_1B}} \times \frac{\overline{BC_1}}{\overline{C_1A}} = 1 \dots\dots\dots (1) \quad (\text{證的此式，得 2/7 分})$$

$\because L \parallel \overline{BC} \therefore \Delta AQB_1 \sim \Delta CA_1B_1$ 且 $\Delta APC_1 \sim \Delta BA_1C_1$

$$\Rightarrow \frac{\overline{AB_1}}{\overline{B_1C}} = \frac{\overline{AQ}}{\overline{CA_1}} \text{ 且 } \frac{\overline{BC_1}}{\overline{C_1A}} = \frac{\overline{A_1B}}{\overline{PA}} \quad (\text{證得此式，得 4/7 分})$$

$$\text{代入(1)} \Rightarrow \frac{\overline{AQ}}{\overline{CA_1}} \times \frac{\overline{CA_1}}{\overline{A_1B}} \times \frac{\overline{A_1B}}{\overline{PA}} = 1 \Rightarrow \overline{PA} = \overline{AQ} \quad \text{已知 } \angle 1 = \angle 2 \Rightarrow \frac{\overline{QA}}{\overline{AP}} = \frac{\overline{QA_1}}{\overline{A_1P}} \therefore \overline{A_1Q} = \overline{A_1P}$$

$$\Rightarrow \overline{AA_1} \perp \overline{PQ} \text{ 但 } L \parallel \overline{BC} \therefore \overline{AA_1} \perp \overline{BC} \quad \text{同理 } \overline{BB_1} \perp \overline{CA}、\overline{CC_1} \perp \overline{AB}。 \quad (\text{證畢，得 7/7 分})$$

3. 數 a ($a=0.12457\dots$) 的第 n 位數等於 $n\sqrt{2}$ 整數部分的首位數。試證 a 是個無理數。(六分)

<參考解法 1>

若實數 a 是有理數，則 a 的小數部分的表示法有週期性，但是 $10^x \times \sqrt{2}$ 到 $1.2 \times 10^x \times \sqrt{2}$ 之間所有的數的整數部分之首位數都是 1，以及 $2 \times 10^x \times \sqrt{2}$ 到 $2.1 \times 10^x \times \sqrt{2}$ 之間所有的數的整數部分之首位數都是 2，而 10^x 可以任意大，故其間有無限多個 1 和無限多個 2，無法有週期性，矛盾。所以 a 是無理數。

<參考解法 2>

分析：先了解 a 的長相，並參照下列數據：

$$\frac{10}{\sqrt{2}} = 5\sqrt{2} = 7.0710681\dots; \quad \frac{20}{\sqrt{2}} = 2(5\sqrt{2}); \quad \frac{30}{\sqrt{2}} = 3(5\sqrt{2});$$

$$\frac{10^2}{\sqrt{2}} = 10(5\sqrt{2}); \quad \frac{10^3}{\sqrt{2}} = 10^2(5\sqrt{2}); \quad \frac{10^{k+1}}{\sqrt{2}} = 10^k(5\sqrt{2});$$

$$\lceil 5\sqrt{2} \rceil = 7 \text{ (一位數)}; \quad \lceil 10(5\sqrt{2}) \rceil = 70 \text{ (二位數)}; \quad \lceil 10^2(5\sqrt{2}) \rceil = 707 \text{ (三位數)};$$

一般而言： $\lceil 10^k(5\sqrt{2}) \rceil$ 是首位數為 7 的 $k+1$ 位數。

(1) $\lceil n\sqrt{2} \rceil$ 是一位數：

$$1 < n\sqrt{2} < 10 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} < n < \frac{10}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \left\lceil \frac{1}{\sqrt{2}} \right\rceil + 1 \leq n \leq \left\lceil \frac{10}{\sqrt{2}} \right\rceil \Leftrightarrow 1 \leq n \leq 7。 \text{ 其中}$$

$$1\sqrt{2} = 1.414\dots \Rightarrow a_1 = 1; \quad 2\sqrt{2} = 2.828\dots \Rightarrow a_2 = 2; \quad 3\sqrt{2} = 4.242\dots \Rightarrow a_3 = 4;$$

$$4\sqrt{2} = 5.656\dots \Rightarrow a_4 = 5; \quad 5\sqrt{2} = 7.070\dots \Rightarrow a_5 = 7; \quad 6\sqrt{2} = 8.484\dots \Rightarrow a_6 = 8;$$

$$7\sqrt{2} = 9.899\dots \Rightarrow a_7 = 9;$$

$$\text{故 } a = 0.\underbrace{1245789}_{\text{7個數}}\dots$$

(2) $\lceil n\sqrt{2} \rceil$ 是二位數：

$$10 < n\sqrt{2} < 100 \Leftrightarrow \left\lceil \frac{10}{\sqrt{2}} \right\rceil + 1 \leq n \leq \left\lceil \frac{10^2}{\sqrt{2}} \right\rceil \Leftrightarrow 8 \leq n \leq 70。 \text{ 其中}$$

$$(a) \quad 10 < n\sqrt{2} < 20 \Leftrightarrow \left\lceil \frac{10}{\sqrt{2}} \right\rceil + 1 \leq n \leq \left\lceil \frac{20}{\sqrt{2}} \right\rceil \Leftrightarrow 8 \leq n \leq 14。$$

$$\text{即 } a_8 = a_9 = a_{10} = \dots = a_{14} = 1 \text{ (7 個相鄰數字皆為 1)}$$

$$(b) 10 < n\sqrt{2} < 30 \Leftrightarrow 15 \leq n \leq 21。$$

即 $a_{15} = a_{16} = a_{17} = \cdots = a_{21} = 2$ (7 個相鄰數字皆為 2)

⋮

$$(c) 90 < n\sqrt{2} < 100 \Leftrightarrow 64 \leq n \leq 70。$$

即 $a_{64} = a_{65} = a_{66} = \cdots = a_{70} = 9$ (7 個相鄰數字皆為 9)

故 $a = 0.\underbrace{1245789}_{7\text{個數}}\underbrace{111\cdots 1}_{7\text{個}1}\underbrace{222\cdots 2}_{7\text{個}2}\underbrace{333\cdots 3}_{7\text{個}3}\cdots\underbrace{888\cdots 8}_{7\text{個}8}\underbrace{999\cdots 9}_{7\text{個}9}\cdots$

(3) $\lceil n\sqrt{2} \rceil$ 是三位數：

$$10^2 < n\sqrt{2} < 10^3 \Leftrightarrow \left\lceil \frac{10^2}{\sqrt{2}} \right\rceil + 1 \leq n \leq \left\lceil \frac{10^3}{\sqrt{2}} \right\rceil \Leftrightarrow 71 \leq n \leq 707。其中$$

$$(a) 10^2 < n\sqrt{2} < 2 \times 10^2 \Leftrightarrow 71 \leq n \leq 141。$$

即 $a_{71} = a_{72} = a_{73} = \cdots = a_{141} = 1$ (70 個相鄰數字皆為 1)

$$(b) 2 \times 10^2 < n\sqrt{2} < 3 \times 10^2 \Leftrightarrow 142 \leq n \leq 212。$$

即 $a_{142} = a_{143} = a_{144} = \cdots = a_{212} = 2$ (70 個相鄰數字皆為 2)

⋮

$$(c) 9 \times 10^2 < n\sqrt{2} < 10^3 \Leftrightarrow 637 \leq n \leq 707。$$

即 $a_{637} = a_{638} = a_{639} = \cdots = a_{707} = 9$ (70 個相鄰數字皆為 9)

故

$a = 0.\underbrace{1245789}_{7\text{個數}}\underbrace{111\cdots 1}_{7\text{個}1}\underbrace{222\cdots 2}_{7\text{個}2}\underbrace{333\cdots 3}_{7\text{個}3}\cdots\underbrace{888\cdots 8}_{7\text{個}8}\underbrace{999\cdots 9}_{7\text{個}9}\underbrace{111\cdots 1}_{70\text{個}1}\underbrace{222\cdots 2}_{70\text{個}2}\underbrace{333\cdots 3}_{70\text{個}3}\cdots\underbrace{888\cdots 8}_{70\text{個}8}\underbrace{999\cdots 9}_{70\text{個}9}\cdots$

同理，「70 個連續的 9」後面緊接「707 個 1」、「707 個 2」、「707 個 3」、…、「707 個 9」、…。我們了解 a 的「長相」之後，就可以用「反證法」來證明 a 是一個無理數。

證明：由定義知 a 是一個無限小數。

假設 a 是一個有理數，其小數的形式是循環小數，令

$$a = 0.a_1a_2\cdots a_n \overbrace{a_{n+1}a_{n+2}\cdots a_{n+m}}^{\text{循環節}}$$

循環節有 m 個數字，其中 m 是一個 k 位數，即 $10^{k-1} \leq m < 10^k$ 。我們要找出「 a 的小數中，存在無限多串“相鄰數字為 1 且個數都超過 m ”」這個事實。

1° 取自然數 n 滿足 $10^{k+1} < n\sqrt{2} < 2 \times 10^{k+1}$ ，此種 n 會使 $a_n = 1$ 。因 n 的範圍為

$\left\lceil \frac{10^{k+1}}{\sqrt{2}} \right\rceil + 1 \leq n \leq 2 \times \left\lceil \frac{10^{k+1}}{\sqrt{2}} \right\rceil$ ，其個數計有 $l_k = 2 \times \left\lceil \frac{10^{k+1}}{\sqrt{2}} \right\rceil - \left\lceil \frac{10^{k+1}}{\sqrt{2}} \right\rceil = \left\lceil \frac{10^{k+1}}{\sqrt{2}} \right\rceil = 10^k \lceil 5\sqrt{2} \rceil$ 個。由於 $l_k = 10^k \lceil 5\sqrt{2} \rceil$ 是 $k+1$ 位數，故 $l_k > m$ ，即「 a 的小數中，存在 l_k 個相鄰數字皆為 1 ($l_k > m$)」

2° 同理，取自然數 n 滿足 $10^{k+2} < n\sqrt{2} < 2 \times 10^{k+2}$ ，此種 n 會使 $a_n = 1$ 。此種 n 的個數計有 $l_k = 10^{k+1} \lceil 5\sqrt{2} \rceil$ 個， l_{k+1} 是 $k+2$ 位數，故 $l_{k+1} > m$ ，即「 a 的小數中，存在 l_{k+1} 個相鄰數字皆為 1 ($l_{k+1} > m$)」。

3° 因此得出無限數列： $l_k, l_{k+1}, l_{k+2}, \dots$ ，其中 $l_n = 10^n \lceil 5\sqrt{2} \rceil$ 為 n 位數 ($n \geq k$)，使得在 a 的小數中，存在 l_k 個相鄰數字皆為 1、存在 l_{k+1} 個相鄰數字皆為 1、存在 l_{k+2} 個相鄰數字皆為 1、…。故 a 是一個無理數。

<評分標準>

1° 說明至 $a = 0.\underbrace{1245789}_{7\text{個數}}\dots$ ，得 1/7 分。

2° 說明至 $a = 0.\underbrace{1245789}_{7\text{個數}}\underbrace{111\dots1}_{7\text{個}1}\underbrace{222\dots2}_{7\text{個}2}\underbrace{333\dots3}_{7\text{個}3}\dots\underbrace{888\dots8}_{7\text{個}8}\underbrace{999\dots9}_{7\text{個}9}\dots$ ，得 2/7 分。

3° 說明至

$a = 0.\underbrace{1245789}_{7\text{個數}}\underbrace{111\dots1}_{7\text{個}1}\underbrace{222\dots2}_{7\text{個}2}\underbrace{333\dots3}_{7\text{個}3}\dots\underbrace{888\dots8}_{7\text{個}8}\underbrace{999\dots9}_{7\text{個}9}\underbrace{9111\dots1}_{70\text{個}1}\underbrace{222\dots2}_{70\text{個}2}\underbrace{333\dots3}_{70\text{個}3}\dots\underbrace{888\dots8}_{70\text{個}8}\underbrace{999\dots9}_{70\text{個}9}\dots$

，得 4/7 分。

4. 能否將一個角柱體分割成若干個角錐體，使得每個角錐體的底面都是角柱體的底面的一部份，且角錐體的頂點也都是角柱體的頂點？(六分)

<參考解法>

令角柱體之底面積為 a ，高為 h ，故其體積為 ah 。若它可以完全分割成 n 個底面積為 a_1 、 a_2 、 \dots 、 a_n 的角錐體，使得每個角錐體的底面都是由角柱體上底或下底的一部份，且角錐的頂點也是角柱的頂點，則角錐體的體積總和為

$$\frac{1}{3}a_1h + \frac{1}{3}a_2h + \dots + \frac{1}{3}a_nh = \frac{1}{3}h(a_1 + a_2 + \dots + a_n) \leq \frac{1}{3}h(2a) = \frac{2}{3}ah \neq ah \text{，矛盾，故不可能。}$$

<評分標準>

1° 說明 n 個小角錐的體積 < 原角柱體的體積，4/7 分

2° 證出 n 個小角錐的體積 $= \frac{1}{3}a_1h + \frac{1}{3}a_2h + \dots + \frac{1}{3}a_nh = \frac{1}{3}h(a_1 + a_2 + \dots + a_n) \leq$

$$\frac{1}{3}h(2a) = \frac{2}{3}ah \neq ah = \text{原角柱體的體積，3/7 分}$$

5. 令 $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} = \frac{a_n}{b_n}$ ，其中 a_n 與 b_n 為互質的正整數。試證：對於無窮多個 n 值，不等式 $b_{n+1} < b_n$ 成立。(七分)

<參考解法>

$$\text{考慮 } 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2 \cdot 3^m} = \frac{a_{2 \cdot 3^m}}{b_{2 \cdot 3^m}} \dots\dots\dots (1)$$

$$\text{與 } 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2 \cdot 3^{m-1}} = \frac{a_{2 \cdot 3^{m-1}}}{b_{2 \cdot 3^{m-1}}} \dots\dots\dots (2)$$

其中 $a_{2 \cdot 3^m}$ 與 $b_{2 \cdot 3^m}$ 互質， $a_{2 \cdot 3^{m-1}}$ 與 $b_{2 \cdot 3^{m-1}}$ 互質。

因 $\frac{1}{3^m} + \frac{1}{2 \cdot 3^m} = \frac{3}{2 \cdot 3^m} = \frac{1}{2 \cdot 3^{m-1}}$ ，所以 (1) 式可改寫成：

$$\begin{aligned} & 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2 \cdot 3^m} \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{3^m - 1} + \frac{1}{3^m} + \frac{1}{3^m + 1} + \dots + \frac{1}{2 \cdot 3^m} \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{3^m - 1} + \frac{1}{3^m + 1} + \dots + \frac{1}{2 \cdot 3^{m-1}} + \left(\frac{1}{2 \cdot 3^m} + \frac{1}{3^m} \right) \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{3^m - 1} + \frac{1}{3^m + 1} + \dots + \frac{1}{2 \cdot 3^{m-1}} + \frac{1}{2 \cdot 3^{m-1}} \dots\dots\dots (3) \end{aligned}$$

比較 (2) 式與 (3) 式， $3^m \mid b_{2 \cdot 3^{m-1}}$ 但 $3^m \nmid b_{2 \cdot 3^m}$ ，且 (2) 中 $b_{2 \cdot 3^{m-1}}$ 除了 3 以外的質數的次方都不

比 $b_{2 \cdot 3^m}$ 低，故 $b_{2 \cdot 3^{m-1}} > b_{2 \cdot 3^m}$ 。因 m 可以為任意正整數，故有無限多個 m 值使命題成立。

<評分標準>

1. 舉出正確的一些實例，2/7。

2. 發現 $3^m \mid b_{2 \cdot 3^{m-1}}$ 但 $3^m \nmid b_{2 \cdot 3^m}$ ，2/7。

3. 得到 $b_{2 \cdot 3^{m-1}}$ 除了 3 以外的質數的次方都不比 $b_{2 \cdot 3^m}$ 低，故 $b_{2 \cdot 3^{m-1}} > b_{2 \cdot 3^m}$ 推出結論，3/7。

6. 一疊 52 張的撲克牌，若黑桃 A 在這疊牌的最上方且任何相鄰的二張牌其點數或是花色相同（這疊牌最上方的牌和最下方的牌視為相鄰），則稱這疊牌排列的順序為「正常的順序」。已知將這疊牌排成「正常的順序」的方法數為 n ，試證：

(a) n 可被 12！整除。（三分）

(b) n 可被 13！整除。（五分）

<參考解法>

(a) 考慮 2、3、4、5、...、K 各數字第一次出現的順序，它有 12！種排列排成「正常的順序」的方法是它的倍數，故 n 可被 12！整除。

(b) 將 52 張牌圍成一圈，將 A、2、3、4、5、...、K 的數字重排後對換，共有 13！種不同的換法。然後由黑桃 A 開始依規定將牌收回。證明這 13！種排法完全不一樣。

如果其中有 a 、 b 兩種牌法完全一樣，則從黑桃 A 開始，對應的花色也都一樣，所以在 b 中，若 x 處是黑桃， a 、 b 的 y 處也是黑桃，因為黑桃只有 13 張，13 是質數，所以從 x 、 y 、 z 、...，歷經 13 次後就會再回到 x 處。也就是 $4k+1$ 張都是黑桃，同理可證，對於紅心、方塊和梅花也都是每 4 張循環一次，但這樣的排法不存在：黑桃 A → 紅心 A → 方塊 A → 梅花 A → 黑桃？所以 n 可被 13！整除。

<評分標準>

(a)1° 任何跟 2~K 排列有關的想法，1/7 分。

2° 直接看出 12！種不一樣，2/7 分

3° 直接說換數字： $12 \times 11 \times \dots \times 1 = 12!$ ，4/7 分。

(b)1° 考慮 (A234...JQK)，指出這個變換可以將一個排法做出 13 個排法，4/7 分。

2° 證明上述 13 種排法互不相同，3/7 分。

3° 考慮 13！互換但未說明，2/7 分。

4° 若證 A、2、3~K 有 13！種變換而直接說 13！整除 n ，1/7 分。

7. 正整數 x_1 、 x_2 、...、 x_k 滿足以下不等式：

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_k^2 < \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_k}{2} ;$$

$$x_1 + x_2 + \dots + x_k < \frac{x_1^3 + x_2^3 + \dots + x_k^3}{2} .$$

(a) 試證 $k > 50$ ；（三分）

(b) 給定 k ，試給符合條件的 x_i 值的例子。（三分）

(c) 試求存在有例子可以滿足條件的最小 k 值。（三分）

<參考解法>

(a) 已知 $2x_1^2 + 2x_2^2 + \dots + 2x_k^2 < x_1 + x_2 + \dots + x_k < \frac{x_1^3 + x_2^3 + \dots + x_k^3}{2}$ 。

若 x_1, x_2, \dots, x_k 皆小於或等於 4，則有 $\frac{x_i^3}{2} \leq x_i^2$ ， $1 \leq i \leq k$ 。

因此 $\frac{x_1^3 + x_2^3 + \cdots + x_k^3}{2} \leq 2x_1^2 + 2x_2^2 + \cdots + 2x_k^2$ ，矛盾。故 x_1, x_2, \cdots, x_k 中至少有一數大於 4。

令 $x_1 > 4$ 。

由 $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_k^2 < \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_k}{2}$ 可知

$$\frac{x_2 + x_3 + \cdots + x_k}{2} - x_2^2 - x_3^2 - \cdots - x_k^2 > x_1^2 - \frac{x_1}{2} > 16 - 2 = 14。$$

考慮多項式 $\frac{t}{2} - t^2 = -(t - \frac{1}{4})^2 + \frac{1}{16}$ 在 $t = \frac{1}{4}$ 時有最大值 $\frac{1}{16}$ ，故可知 $\frac{x_i}{2} - x_i^2 \leq \frac{1}{16}$ ， $1 \leq i \leq k$ 。

因此有 $14 < \frac{x_2 + x_3 + \cdots + x_k}{2} - x_2^2 - x_3^2 - \cdots - x_k^2 \leq \frac{k-1}{16}$ 。

可得 $k \geq 225 > 50$ 。

(b) 當 $k=962$ 時，令 $x_1=8$ ， $x_2=x_3=\cdots=x_{962}=\frac{1}{4}$ ，則有

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{962}^2 &= 124 \frac{1}{16} < 124 \frac{1}{8} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{962}}{2} \\ x_1 + x_2 + \cdots + x_{962} &= 248 \frac{1}{4} < 263 \frac{65}{128} = \frac{x_1^3 + x_2^3 + \cdots + x_{962}^3}{2} \end{aligned}$$

(c) 我們先證以下 2 個引理：

引理 1：設 $a, b, c \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ ，它們不全相等且至多一個為 0，設非負實數 x, y, z ， $x \leq y \leq z$ 滿足

$$\begin{aligned} x + y + z &= a + b + c, \\ x^2 + y^2 + z^2 &= a^2 + b^2 + c^2, \end{aligned}$$

證明，存在非負實數 x_1, x_2 ， $x_1 < x_2$ 使得 $x \in [x_1, x_2]$ 且滿足：

(i) 若 $x = x_1$ ，則 $0 = x < y \leq z$ 或 $0 < x < y = z$ ；

(ii) 若 $x \in (x_1, x_2)$ ，則 $x < y < z$ ；

(iii) 若 $x = x_2$ ，則 $x = y < z$ 。

引理 1 的證明：

$$\text{令 } F_1(x) = 2\left(\frac{a+b+c-x}{2}\right)^2 + x^2 - a^2 - b^2 - c^2, F_2(x) = (a+b+c-2x)^2 + 2x^2 - a^2 - b^2 - c^2,$$

其中 $x \in [0, \frac{a+b+c}{3}]$ 。此時 $F_1'(x) = 3x - (a+b+c)$ 。

$$\because 0 \leq x \leq \frac{a+b+c}{3},$$

$$\therefore F_1'(x) \leq 0.$$

$$\text{同理 } F_2'(x) = 4[3x - (a+b+c)].$$

$$\therefore F_1(x), F_2(x) \text{ 在 } [0, \frac{a+b+c}{3}] \text{ 上遞減}.$$

注意到 $F_2(0) = (a+b+c)^2 - a^2 - b^2 - c^2 > 0$, $F_2(\frac{a+b+c}{3}) = 3(\frac{a+b+c}{3})^2 - a^2 - b^2 - c^2 < 0$ (因為 a, b, c 不全相等，故不等於 0)。

$\therefore F_2(x) = 0$ 在 $(0, \frac{a+b+c}{3})$ 上有解。又因為 $F_2(x)$ 遞減，故此解唯一。我們取這個解為 x_2 ，

則 $F(x_2) = 0$ 。

$$\text{又 } F_1(\frac{a+b+c}{3}) = 3(\frac{a+b+c}{3})^2 - a^2 - b^2 - c^2 < 0, F_1(0) = 2(\frac{a+b+c}{2})^2 - a^2 - b^2 - c^2.$$

若 $F_1(0) > 0$ ，則取 x_1 為 $F_1(x) = 0$ 的解，同上可知這個解唯一；若 $F_1(0) \leq 0$ ，則取 $x_1 = 0$ 。我們證明上述 x_1, x_2 滿足條件。

現設 $G(y, z) = y^2 + z^2$ ($y < z$)，我們證明：

$$G(y, z) > G(y+t, z-t) \quad (0 < t < \frac{z-y}{2}) \Leftrightarrow z^2 - (z-t)^2 > (y+t)^2 - y^2$$

又 $Q(k) = (k+t)^2 - k^2$ 在 $(0, +\infty)$ 上嚴格增，故由 $z-t > y$ 知上式成立。

$\therefore G(y, z) > G(y+t, z-t)$ 。

$\therefore G(y, z)$ 在 $(x, a+b+c-x)$ 時取最大值，在 $(\frac{a+b+c-x}{2}, \frac{a+b+c-x}{2})$ 時取最小值。

\therefore 當 $x = x_2$ 時， $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2x_2^2 + (a+b+c-2x_2)^2 = a^2 + b^2 + c^2$ 當且僅當 $y = x_2, z = (a+b+c-2x_2)$ 時等號成立，即 $x = x_2$ 時 $x = y < z$ 滿足 (iii)；

當 $x = x_1$ 時，

若 $x_1 = 0$ ，則 (i) 顯然成立；

若 $x_1 \neq 0$ ，則當 $x = x_1$ 時

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq x^2 + (\frac{y+z}{2})^2 + (\frac{y+z}{2})^2 = x_1^2 + 2(\frac{a+b+c-x_1}{2})^2 = a^2 + b^2 + c^2,$$

等號成立當且僅當 $(y, z) = (\frac{y+z}{2}, \frac{y+z}{2})$ 。

\therefore 此時 $0 < x_1 < y = z$ ，滿足 (ii)。

我們再證 $x_2 > x_1$ ，當 $x_1 = 0$ 時顯然成立；

當 $x_1 \neq 0$ 時，若 $x_1 \geq x_2$ ，由 $F_1(x)$ 在 $(0, \frac{a+b+c}{3}]$ 上遞減知 $F_1(x_2) \geq F_1(x_1)$ 。

又由 $G(y, z) > G(y+t, z-t)$ 知 $F_2(x_2) > F_1(x_2)$ 。故 $F_2(x_2) > F_1(x_1) = a^2 + b^2 + c^2$ ，矛盾！

\therefore 必有 $x_1 < x_2$ 。

接下來我們證明，若 $x \leq y \leq z$ 滿足 $x+y+z = a+b+c, x^2+y^2+z^2 = a^2+b^2+c^2$ ，則必有 $x_1 \leq x \leq x_2$ 。

當 $x_1 = 0$ 時，左邊顯然成立，現考慮 $x_1 \neq 0$ 的情況。

若存在 x_0 ，使得 $\frac{a+b+c}{3} > x_0 > x_2$ ，且有 $x_0+y+z = a+b+c, x_0^2+y^2+z^2 = a^2+b^2+c^2$ 。

則由 $F_2(x)$ 在 $(0, \frac{a+b+c}{3})$ 上遞減知 $F_2(x_0) < F_2(x_2) = a^2 + b^2 + c^2$ 。

又由 $G(y, z) > G(y+t, z-t)$ 知 $x_0^2 + y^2 + z^2 \leq x_0^2 + x_0^2 + (a+b+c-2x_0)^2 = F_2(x_0)$ 。

此時 $x_0^2 + y^2 + z^2 \leq F_2(x_0) < a^2 + b^2 + c^2$ ，矛盾！

同理可知，若 $0 < x_0 < x_1$ ，則必有 $x_0^2 + y^2 + z^2 \geq F_1(x_0) > a^2 + b^2 + c^2$ ，矛盾！

$\therefore x \in [x_1, x_2]$ 。

最後，我們證明這樣的 x_1, x_2 滿足 (ii)。

\therefore 對 $x_1 < x < x_2$ ， $F_1(x) < F_1(x_1) = a^2 + b^2 + c^2, F_2(x) > F_2(x_2) = a^2 + b^2 + c^2$ 。

\therefore 此時 $x \neq y, y \neq z$ ，故 $x < y < z$ ，(ii) 成立。

綜上所述，這樣的 x_1, x_2 滿足條件，引理 1 得證。

引理 2：設非負實數 a_1, a_2, \dots, a_n ($n \geq 3$) 及 $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ 使得

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \dots + x_n &= a_1 + a_2 + \dots + a_n, \\ x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 &= a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2. \end{aligned}$$

設 $F_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1^3 + x_2^3 + \dots + x_n^3$ 。則 F_n 在 $0 \leq x_1 = x_2 = \dots = x_{n-1} \leq x_n$ 時取最大值。

引理 2 的證明：首先，我們證明 $n=3$ 的情況。

$\therefore x \leq y \leq z$ ，且 $y+z = a+b+c-x, y^2+z^2 = a^2+b^2+c^2-x^2$ ，

\therefore 我們可用 x 表示 y, z ，其中 $x \in [x_1, x_2]$ 。

設 $f(x) = x^3, g(x) = f'(x) = 3x^2$ ，則 $g''(x) = 6 > 0$ 。

$\therefore g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上嚴格凸。

令 $F(x) = f(x) + f(y(x)) + f(z(x))$ 。我們證明 $F(x)$ 在 $x = x_2$ 時取最大值。

若成立，則由引理 1 知 $F(x)$ 在 $0 < x = y < z$ 時取最大值。

為證上述結論成立，設 $x \in (x_1, x_2)$ ，由引理 1 知 $x < y < z$ 。

由 $x + y(x) + z(x) = a + b + c$, $x^2 + y(x)^2 + z(x)^2 = a^2 + b^2 + c^2$ 求導可知 $y' + z' = -1$, $yy' + zz' = -x$ 。

因此 $y' = \frac{x-z}{z-y}$, $z' = \frac{x-y}{y-z}$ ，且由 $F'(x) = f'(x) + y'f(y) + z'f(z)$ 得

$$\frac{F'(x)}{(x-y)(x-z)} = \frac{g(x)}{(x-y)(x-z)} + \frac{g(y)}{(y-z)(y-x)} + \frac{g(z)}{(z-x)(z-y)}。$$

因為 g 是嚴格凸的，由琴生不等式知上式右邊大於 0。又 $(x-y)(x-z) > 0$ ，

$\therefore F'(x) > 0$ 。

故 $F(x)$ 在 $x \in (x_1, x_2)$ 上嚴格增。因此， $F(x)$ 在 $x = x_2$ 時取最大值。故 $n = 3$ 時命題成立。

下面我們考慮 $n > 3$ 的情況：

為推出矛盾，設 F_n 在 (b_1, b_2, \dots, b_n) 時取最大值，其中 $b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n$ 且 $b_1 < b_{n-1}$ 。

設 $x_1, x_{n-1}, x_n \in R^+$ 且 $x_1 + x_{n-1} + x_n = b_1 + b_{n-1} + b_n$, $x_1^2 + x_{n-1}^2 + x_n^2 = b_1^2 + b_{n-1}^2 + b_n^2$ ，由 $n = 3$ 的情況知 $F_3(x_1, x_{n-1}, x_n) = f(x_1) + f(x_{n-1}) + f(x_n)$ 在 $x_1 = x_{n-1} < x_n$ 時取最大值，這與 $b_1 < b_{n-1}$ 矛盾！因此 F_n 在 $0 < x_1 = x_2 = \dots = x_{n-1}$ 時取最大值，引理 2 得證。

由於原題關於 x_1, x_2, \dots, x_k 對稱，故不妨設 $0 < x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_k$ 。

由引理 2 知，當 $x_1 + x_2 + \dots + x_k$ 取定， $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_k^2$ 取定，則 $x_1^3 + x_2^3 + \dots + x_n^3$ 在 $0 \leq x_1 = x_2 = \dots = x_{n-1} \leq x_n$ 時取最大值。

設 $S = x_1 + x_2 + \dots + x_k$ ，則若 x_1, x_2, \dots, x_k 滿足條件，則必有 $S = (k-1)x + y$ ，且

$$(k-1)x^2 + y^2 < \frac{(k-1)x + y}{2} \dots \quad ;$$

$$(k-1)x + y < \frac{(k-1)x^3 + y^3}{2} \dots \quad , \text{ 其中 } 0 < x \leq y。$$

此時注意到 $(k-1)x^3 + y^3 = [(k-1)x^2 + y^2](x+y) - xy(k-1)x + y$ ，代入 得

$$(xy+2)[(k-1)x+y] < [(k-1)x^2+y^2](x+y) \Rightarrow \frac{(k-1)x+y}{(k-1)x^2+y^2} < \frac{x+y}{2+xy}。$$

又由 知 $\frac{(k-1)x+y}{(k-1)x^2+y^2} > 2$ 。

$$\therefore \frac{x+y}{2+xy} > 2 \Rightarrow x+y > 4+2xy \Rightarrow 2x+2y > 8+4xy \Rightarrow (1-2x)(2y-1) > 7。$$

$\therefore x \leq y$ ，

\therefore 必有 $x < \frac{1}{2} < y$ ，

$$\therefore 1-2x > \frac{7}{2y-1} \Rightarrow x < \frac{y-4}{2y-1} \dots$$

又由 知 $2(k-1)x^2 - (k-1)x + 2y^2 - y < 0$ 。

設 $f(x) = 2(k-1)x^2 - (k-1)x + 2y^2 - y$ ，則 $f(x) = 0$ 有兩相異實根。

$\therefore f(x) < 0$ ，

$$\therefore \frac{(k-1) - \sqrt{(k-1)^2 - 8(k-1)(2y^2 - y)}}{4(k-1)} < x, \text{ 此時 } k-1 > 8(2y^2 - y)。$$

$$\text{結合 知 } \frac{(k-1) - \sqrt{(k-1)^2 - 8(k-1)(2y^2 - y)}}{4(k-1)} < \frac{y-4}{2y-1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4} - \frac{y-4}{2y-1} < \frac{\sqrt{(k-1)^2 - 8(k-1)(2y^2 - y)}}{4(k-1)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{15-2y}{(2y-1)} < \frac{\sqrt{(k-1)^2 - 8(k-1)(2y^2-y)}}{k-1}.$$

當 $y \geq \frac{15}{2}$ 時上式恒成立，此時 $k-1 > 8(2 \cdot \frac{225}{4} - \frac{15}{2}) \Rightarrow k \geq 842$.

當 $y < \frac{15}{2}$ 時， $(\frac{15-2y}{2y-1})^2 < \frac{(k-1)-8(2y^2-y)}{k-1}$

$$\Leftrightarrow \frac{8(2y^2-y)}{k-1} < 1 - \frac{(2y-15)^2}{(2y-1)^2} = \frac{(2y-1)^2 - (2y-15)^2}{(2y-1)^2} = \frac{14 \cdot (4y-16)}{(2y-1)^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{k-1} < \frac{7(y-4)}{(2y-1)^2 (2y^2-y)}.$$

現求 $\frac{7(y-4)}{(2y-1)^2 (2y^2-y)}$ 的最大值：設 $f(x) = \frac{7(x-4)}{(2x-1)^2 (2x^2-x)}$ ($4 < x < \frac{15}{2}$)，則

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{7[(2x-1)^2 (2x^2-x) - (x-4)((2x-1)^3 + 6x(2x-1)^2)]}{(2x-1)^4 (2x^2-x)^2} \\ &= \frac{7(2x-1)^2 [2x^2-x-(x-4)(8x-1)]}{(3x-1)^4 (2x^2-x)^2} = \frac{-7(6x^2-32x+4)}{(2x-1)^2 (2x^2-x)^2} = \frac{-14(3x^2-16x+2)}{(2x-1)^2 (2x^2-x)^2}. \end{aligned}$$

$\therefore x \in (-\infty, \frac{8-\sqrt{58}}{3}) \cup (\frac{8+\sqrt{58}}{3}, +\infty)$ 時， $f'(x) < 0$ ； $x \in [\frac{8-\sqrt{58}}{3}, \frac{8+\sqrt{58}}{3}]$ 時， $f'(x) >$

0 .

$\therefore f(x)$ 在 $[4, \frac{8+\sqrt{58}}{3}]$ 上遞增，在 $[\frac{8+\sqrt{58}}{3}, \frac{15}{2})$ 上遞減 .

$\therefore f(x)$ 在 $x = \frac{8+\sqrt{58}}{3}$ 時取最大值 .

$$\therefore k-1 > \frac{1}{f(\frac{8+\sqrt{58}}{3})} \approx 514.167.$$

$$\therefore k \geq 516.$$

當 $k=516$ 時，取 $y = \frac{8+\sqrt{58}}{3}$ ， $x = 0.12776$. 此時，式顯然成立 .

代入 知，右邊－左邊 $\approx 0.052687606 > 0$.

$$\therefore k_{\min} = 516.$$

<評分標準>

(a) 1° 指出存在 $x_i > 4$ ，得 2/7 分。

2° 列出 $\sum_{i=1}^k \left(x_i - \frac{1}{4}\right)^2 < h$ ，3/7 分

3° 列出 $\sum_{i=1}^k x_i - 2x_i^2 \geq 14$ ，1/7 分

(b) 一個（少數幾個）夠大，其他的適當小的想法，3/7 分。

(c) 1° 得到 $k > 200$ ，0.5/7 分

2° 得到最小 k 值 < 1000 ，0.5/7 分

3° 得到 $k > 300$ ，0.5/7 分

4° 得到最小 k 值 < 600 ，0.5/7 分

5° 注意到 $x_1 = x_2 = \dots = x_l > x_{l+1} = \dots = x_k$ ，1/7 分

6° 證出 5°，1/7 分

7° 注意 $l=1$ ，1/7 分。

《成績是取最高得分三題的總和，考試時間五小時。》