

International Mathematics Tournament of Towns

環球城市數學競賽

2008 秋季賽 國中組 高級卷

※每題必須詳細寫下證明及理由，只寫答案不一定有分數。

1. 在一塊 100×100 的棋盤上放入 100 枚皇后，使得它們之間都互相不攻擊。若將此棋盤切割成四塊 50×50 的小棋盤，試證每塊小棋盤上至少有一枚皇后。
(註：西洋棋皇后可攻擊東、西、南、北、東南、西南、東北、西北方向的棋子。)(四分)
2. 有四塊石子，它們的重量都是正整數公克，及一台可指示左秤盤與右秤盤上物品重量差的「重量差天平」。若至多可能有一次秤重此天平會有 1 公克的誤差，請問能否用此「重量差天平」秤四次即可確定這四塊石子的正確重量？
(六分)
3. 小思畫出一個三角形 ABC 及它的一條中線 AD 。當小艾得到 $\frac{AD}{AC}$ 之值即可證明 $\angle CAB$ 為鈍角且 $\angle BAD$ 為銳角。請確定 $\frac{AD}{AC}$ 之值並證明您的結果。(六分)
4. 小貝宣稱他有一張交通圖，圖上有五個城市與十條公路，每條公路恰好連接兩個城市，任兩個城市恰只有一條公路連接，任一條公路至多與其它一條公路相交，每個城市連出去的四條公路分別可以交錯地塗上紅色或黃色。請問小貝宣稱的事項是否為真？(六分)
5. 令 a_1, a_2, \dots, a_n 為正數使得 $a_1 + a_2 + \dots + a_n \leq \frac{1}{2}$ 。試證
 $(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n) \leq 2$ (八分)
6. 三角形 ABC 的三個邊互不相等，點 E 與點 F 在三角形 ABC 之外部使得 $\angle ECA = \angle EAC = \angle FAB = \angle FBA = \theta$ 。線段 BC 的中垂線與通過點 A 且垂直於 EF 的直線交於點 D ，請問 $\angle BDC$ 之值為何？(九分)
7. 在無窮數列 $\{a_n\}$ ， $a_0 = 0$ 中，對於 $n \geq 1$ ，若 n 的最大奇因數除以 4 餘數為 1，則 $a_n = a_{n-1} + 1$ ；若 n 的最大奇因數除以 4 餘數為 3，則 $a_n = a_{n-1} - 1$ 。此數列的首幾項為：0、1、2、1、2、3、2、1、2、3、4、3、2、3、2、1、 \dots 。
(a) 證明在此數列中，1 將出現無窮多次；(五分)
(b) 證明在此數列中，每一個正整數將出現無窮多次。(五分)

《成績是取最高得分三題的總和，考試時間五小時。》