

International Mathematics Tournament of Towns

環球城市數學競賽

2008 秋季賽 高中組 高級卷

※每題必須詳細寫下證明及理由，只寫答案不一定有分數。

1. 改變 8×8 棋盤的各條格線之間的距離，使得每個小格子不再是正方形而是矩形，它們之間的面積也不一定互相相等。將棋盤黑白相間塗色，若任意一個白色格子的面積至多是任意一個黑色格子面積的 2 倍，請問所有白色格子總面積至多是所有黑色格子總面積的多少倍？（四分）
2. 將空間分割為許多互不重疊的單位正立方體。以下敘述是否必定為真：每一個單位正立方體都存在有另一個單位正立方體與它有一個完全吻合的面？（六分）
3. 在一個雙人對局遊戲中，最初有 $n > 2$ 堆石子，每堆都恰好有一顆石子。兩人輪流進行以下操作：任選石子數量互質的二堆，將它們合併為一堆，無法依上述規則再繼續操作者為輸方。對於任意 $n > 2$ ，無論對手如何應對，請問玩家有無必勝的策略？（六分）
4. 在四邊形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ 但 $AB \neq CD$ ，對角線 AC 與三角形 BCD 的外接圓另相交於點 A' 、與三角形 BAD 的外接圓另相交於點 C' ；對角線 BD 與三角形 ABC 的外接圓另相交於點 D' 、與三角形 ADC 的外接圓另相交於點 B' 。試證四邊形 $A'B'C'D'$ 也有一雙對邊互相平行。（六分）
5. 在無窮數列 $\{a_n\}$ ， $a_0 = 0$ 中，對於 $n \geq 1$ ，若 n 的最大奇因數除以 4 餘數為 1，則 $a_n = a_{n-1} + 1$ ；若 n 的最大奇因數除以 4 餘數為 3，則 $a_n = a_{n-1} - 1$ 。此數列的首幾項為：0、1、2、1、2、3、2、1、2、3、4、3、2、3、2、1、…。試證在此數列中，每一個正整數將出現無窮多次。（八分）
6. $P(x)$ 為實係數多項式，且存在無窮多的整數對 (m, n) 使得 $P(m) + P(n) = 0$ 。試證它的圖形 $y = P(x)$ 具有中心對稱。（九分）
7. 某項測驗有 30 道是非題。小文對於試題內容完全不懂，但他可以對相同的試卷作答多次，每次每一題他都必須作答，每份試卷作完後他都會被告知答對的題數。請問當他
 - (a) 共作答 30 次；（五分）
 - (b) 共作答 25 次，（五分）他有什麼方法保證最後一次作答可以將這 30 道題完全答對？

《成績是取最高得分三題的總和，考試時間五小時。》