

International Mathematics Tournament of Towns

環球城市數學競賽

2008 秋季賽 高中組 初級卷

※每題必須詳細寫下證明及理由，只寫答案不一定有分數。

1. 小王將一些餅乾放入數個盒子內，並記錄下每個盒子內餅乾的數量，如果某個數目重複出現，則只記錄一次。小丁從每個盒子內各取出一塊餅乾放入第一個盤子內，接著從非空的盒子內各取出一塊餅乾放入第二個盤子內；繼續此動作直到所有盒子內的餅乾都拿光為止。接著小丁記錄下每個盤子內餅乾的數量，同小王一樣，如果某個數目重複出現，則只記錄一次。試證小王所記錄的數目之個數與小丁所記錄的數目之個數相同。(三分)
2. 已知 n 為大於 2 的整數，請找出非負實數 x_1, x_2, \dots, x_n 使得 $x_1 - x_2 = 1$ 且當 $1 \leq k \leq n$ 、 $S = x_1 + x_2 + \dots + x_n$ 時， $\sqrt{x_k} + \sqrt{S - x_k}$ 之值全都相等。(三分)
3. 有一個三十邊形 $A_1A_2A_3 \cdots A_{30}$ 內接於半徑為 2 的圓內。試證恆可以在弧 A_kA_{k+1} (其中 $1 \leq k \leq 29$) 上找出一個點 B_k ；在弧 $A_{30}A_1$ 上找一個點 B_{30} ，使得六十邊形 $A_1B_1A_2B_2A_3B_3 \cdots A_{30}B_{30}$ 的面積之數值等於三十邊形 $A_1A_2A_3 \cdots A_{30}$ 的周長之數值。(四分)
4. 有五個相異正整數構成一個等差數列，請問它們的乘積可不可能等於 a^{2008} (其中 a 為正整數)？(四分)
5. 在一個無限大的方格表上有許多個矩形，它們的邊都落在格線上，它們之間也互相都沒有共同的內點，且每個矩形的內部都包含有奇數個小方格。試證可以用四種顏色將這些矩形塗色，使得任意兩個塗上相同顏色的矩形都沒有共同的邊界點。(四分)

《成績是取最高得分三題的總和，考試時間四小時。》