

注意：

允許學生個人、非營利性的圖書館或公立學校合理使用本基金會網站所提供之各項試題及其解答。可直接下載而不須申請。

重版、系統地複製或大量重製這些資料的任何部分，必須獲得財團法人臺北市九章數學教育基金會的授權許可。

申請此項授權請電郵 ccmp@seed.net.tw

Notice:

Individual students, nonprofit libraries, or schools are permitted to make fair use of the papers and its solutions. Republication, systematic copying, or multiple reproduction of any part of this material is permitted only under license from the Chiuchang Mathematics Foundation.

Requests for such permission should be made by e-mailing Mr. Wen-Hsien SUN ccmp@seed.net.tw

2016/2017 初中組第二輪檢測試題詳解

1. 請問下列哪個數不能表示成兩個質數之和？

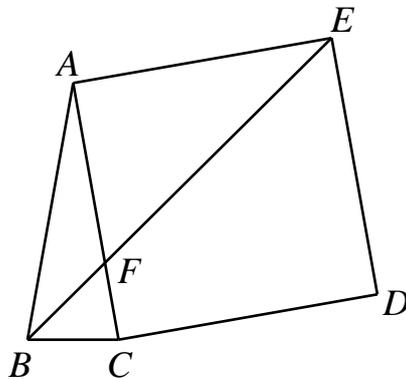
- (A) 19 (B) 20 (C) 21 (D) 22 (E) 23

【參考解法】

$19=2+17$ 、 $20=3+17$ 、 $21=2+19$ 、 $22=3+19$ ，而若能將 23 表示成兩個質數之和，這兩個質數必為一奇一偶，故偶質數必為 2，因此奇質數為 $23-2=21$ ，與 21 不是質數矛盾。

答案：(E)

2. 在 $\triangle ABC$ 中， $AB=AC$ 、 $\angle ACB=80^\circ$ ，以 AC 為邊向外側作正方形 $ACDE$ ，連接 BE 與 AC 相交於點 F ，如下圖所示。請問 $\angle BFC$ 等於多少度？



- (A) 55° (B) 60° (C) 65° (D) 70° (E) 75°

【參考解法】

由 $AB=AC$ 知 $\angle ABC=\angle ACB=80^\circ$ ，故 $\angle BAC=180^\circ-2\times 80^\circ=20^\circ$ 。

由於 $ACDE$ 是正方形，故 $AE=AC=AB$ ；

又 $\angle BAE=90^\circ+20^\circ=110^\circ$ ，所以 $\angle AEB=\frac{180^\circ-110^\circ}{2}=35^\circ$ ，

因此 $\angle BFC=\angle AFE=180^\circ-90^\circ-35^\circ=55^\circ$ 。

答案：(A)

3. 小虎與小亮都要郵寄一件包裹，郵局的收費標準為：**不超出 10 kg 的包裹**每 kg 的運費為 6 元，超出 10 kg 的部分每 kg 平均運費略低一些。若小虎郵寄的包裹比小亮郵寄的包裹重 20%，兩人的運費分別為 92 元、80 元。請問**超出 10 kg 部分比 10 kg 以內每 kg 的平均運費低**了多少元？

- (A) 1.5 (B) 2 (C) 2.5 (D) 3 (E) 3.5

【參考解法 1】

由題意知，10 kg 包裹的運費為 60 元，故小虎與小亮兩人的包裹都超過 10 kg。超出 10 kg 部分的運費，小虎為 $92-60=32$ 元、小亮為 $80-60=20$ 元。設小亮的

包裹重為 x kg，則小虎的包裹重為 $(1+20\%)x=1.2x$ kg，可得 $\frac{x-10}{1.2x-10}=\frac{20}{32}$ ，解

方程知 $x=15$ 。即超出 10 kg 部分每 kg 的平均運費為 $20 \div (15-10) = 20 \div 5 = 4$ 元，故超出 10 公斤部分每公斤平均運費比 10 公斤以內的低了 $6-4=2$ 元。

【參考解法 2】

由題意知，10 kg 包裹的運費為 60 元，故小虎與小亮兩人的包裹都超過 10 kg。超出 10 kg 部分的運費，小虎為 $92-60=32$ 元、小亮為 $80-60=20$ 元。若設超出 10 kg 部分每 kg 運費為 x 元，則小虎的包裹重為 $10+\frac{32}{x}$ kg、小亮的包裹重為 $10+\frac{20}{x}$ kg，並由題意得 $10+\frac{32}{x}=1.2 \times (10+\frac{20}{x})$ ，解方程知 $x=4$ 。即超出 10 kg 部分每 kg 的平均運費為 4 元，故超出 10 公斤部分每公斤平均運費比 10 公斤以內的低了 $6-4=2$ 元。

答案：(B)

4. 已知 $A=3x^2+3x$ 、 $B=-x^2+x+5$ 、 $C=x^2+x-1$ ，請問

$$4A-(B-2(2B-3C)+2A)-2B=?$$

(A) $-x^2+x+11$

(B) $-x^2-x+11$

(C) $-x^2+x+1$

(D) $-x^2+x-1$

(E) x^2+x+11

【參考解法】

$$4A-(B-2(2B-3C)+2A)-2B=2A+B-6C=B+2(A-3C)=-x^2+x+11。$$

答案：(A)

5. 小華的書架上放有文學書、數學書、歷史書與科普書。其中數學書的冊數是文學書的 5 倍、科普書的冊數是歷史書的 4 倍。請問書架上書的總冊數不可能是下列哪個值？

(A) 21

(B) 23

(C) 26

(D) 29

(E) 30

【參考解法】

設文學書有 x 冊，歷史書有 y 冊，其中 x 、 y 為正整數，則書架上書的總冊數為 $x+5x+y+4y=6x+5y$ 。當 $x=1$ 、 $y=3$ 時， $6x+5y=21$ ；當 $x=3$ 、 $y=1$ 時， $6x+5y=23$ ；當 $x=1$ 、 $y=4$ 時， $6x+5y=26$ ；當 $x=4$ 、 $y=1$ 時， $6x+5y=29$ 。而若 $6x+5y=30$ ，則 $6x$ 必為 5 的倍數，故 x 也是 5 的倍數，這將導致 $6x \geq 30$ ，即 $5y \leq 0$ ，矛盾。

答案：(E)

6. 將數 1、2、3、4 分別填入 4×4 方格表的小方格內，使得每一行、每一列上的四個數都不相同。已在部分的小方格內填入數，如下圖所示，請問圖中 A、B 位置上的數之和是多少？

	A	4	
B		1	
1	2	3	4
3	4	2	1

【參考解法】

A 下方的空格不能填 1、2、4，故只能填 3，因此 A 格只能填 1；
B 上方的空格不能填 1、3、4，故只能填 2，因此 B 格只能填 4。
故 $A+B=1+4=5$ ，完整的填法如右圖所示。

2	1	4	3
4	3	1	2
1	2	3	4
3	4	2	1

答案：5

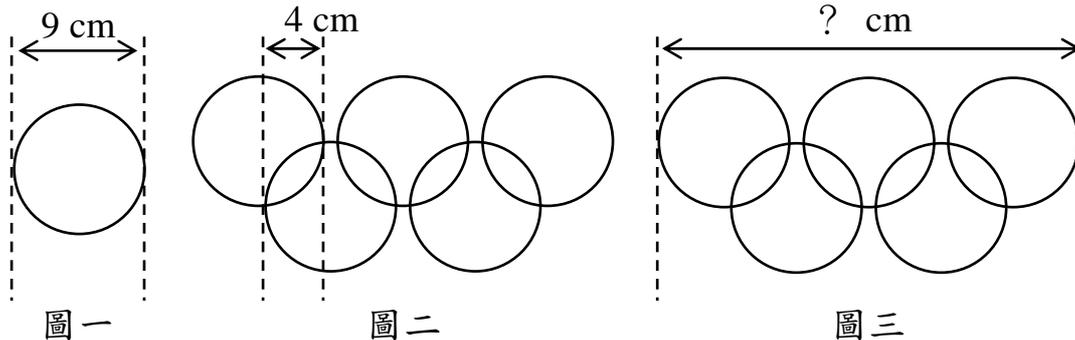
7. 一個三角形的兩條邊之長度分別是 6 cm 與 13 cm，已知第三條邊的長度也是整數 cm，請問這個三角形的周長最少是多少 cm？

【參考解法】

由三角形的兩邊之差必小於第三邊之長度，知第三邊的長度大於 $13-6=7$ cm，故其長度至少為 8 cm，因此周長最少為 $13+6+8=27$ cm。

答案：27 cm

8. 下圖一顯示一個直徑為 9 cm 的圓，圖二由五個直徑為 9 cm 的圓組成一個奧運五環，其中顯示兩條與圓相切的虛線，其距離為 4 cm，請問圖三這個奧運五環的圖案從左到右的總長度為多少 cm？

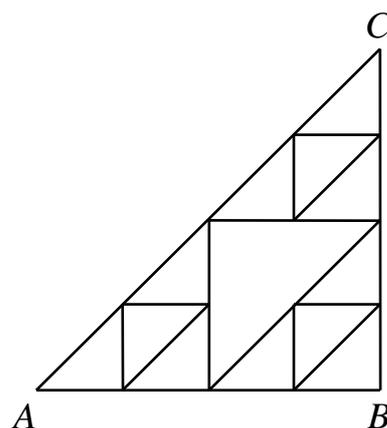


【參考解法】

奧運五環圖案的第一列有 3 個圓，根據圖一與圖二所示，相鄰兩個圓之間距為 $9-4-4=1$ cm，故圖三顯示此奧運五環從左到右的總長度為 $3 \times 9 + 2 \times 1 = 29$ cm。

答案：29 cm

9. 下圖是由一些等腰直角三角形拼成的圖形，若一隻螞蟻欲沿著三角形的邊從 A 點爬到 C 點，規定在爬行的過程中只能向右方、上方或者斜右上方爬行。請問這隻螞蟻總共有多少條不同的爬行路徑？

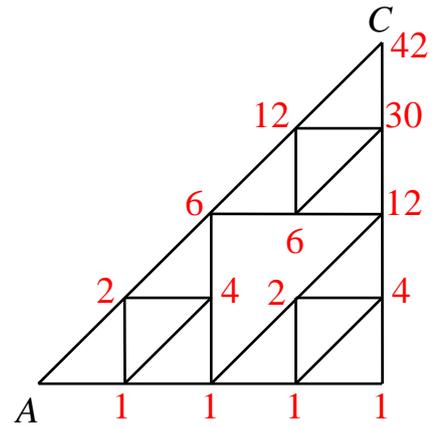


【參考解法】

如圖所示，圖中各點的數即為螞蟻從起點到該點的不同路徑數：

故從 A 點爬到 C 點共有 42 條不同的爬行路徑。

答案：42 條



10. 在 1 到 1000 這 1000 個正整數中，請問總共有多少個正整數 n 使得 $n^3 + n^2 + n$ 之值是 8 的倍數？

【參考解法】

由於 $n^3 + n^2 + n = n(n^2 + n + 1)$ ，而當 n 是正整數時， n^2 與 n 的奇偶性相同，所以 $n^2 + n + 1$ 必為奇數，故 $n^3 + n^2 + n$ 之值是 8 的倍數的充要條件為 n 是 8 的倍數，

因此滿足條件的正整數 n 總共有 $\frac{1000}{8} = 125$ 個。

答案：125 個

11. 已知 $a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2$ ，其中 a 、 b 、 c 為非零實數，請問

$\frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} + \frac{a+b}{c}$ 的值是什麼？

【參考解法】

將已知等式展開整理得 $2(ab + bc + ca) = 0$ ，即 $ab + bc + ca = 0$ 。

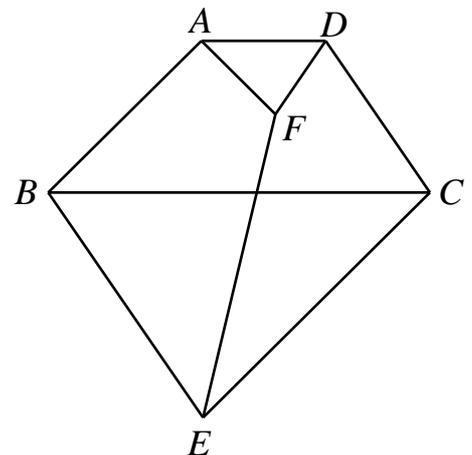
由於 a 、 b 、 c 為非零實數，故 $\frac{ab + bc + ca}{abc} = 0$ ，即 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$ ，因此

$$\frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} + \frac{a+b}{c} = (a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) - 3 = -3。$$

答案：-3

【註】 本題也可以使用代入特殊值的方法。

12. 在梯形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ 。過 B 且平行於 CD 的直線與過 C 且平行於 AB 的直線交於點 E ，點 F 為 $ABCD$ 內部的點使得 $\angle FAD = \angle ABC$ 、 $\angle FDA = \angle DCB$ ，如下圖所示。已知四邊形 $ABEF$ 的面積為 20 cm^2 、並且四邊形 $DCEF$ 的面積為 16 cm^2 ，請問梯形 $ABCD$ 的面積為多少 cm^2 ？



【參考解法】

延長 BA 、 CD 交於點 G ，如右圖所示。

顯然 $GBEC$ 是一個平行四邊形，故

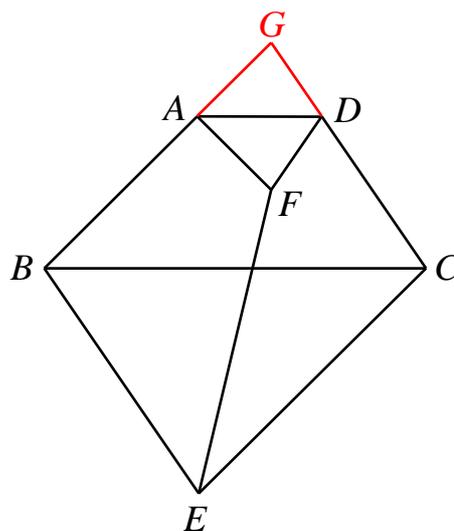
$S_{GBEC} = 2S_{GBC}$ 。由 $\angle FAD = \angle ABC = \angle GAD$ 、
 $\angle FDA = \angle DCB = \angle GDA$ 、 $AD = AD$ 可以得知

$\triangle FDA \cong \triangle GDA$ ，故 $S_{FDA} = S_{GDA}$ ，因此

$S_{GAFD} = 2S_{GDA}$ 。所以

$$\begin{aligned} S_{ABEF} + S_{DCEF} &= S_{GBEC} - S_{GAFD} \\ &= 2(S_{GBC} - S_{GDA}) \\ &= 2S_{ABCD} \end{aligned}$$

故得知 $S_{ABCD} = \frac{20+16}{2} = 18 \text{ cm}^2$ 。



答案： 18 cm^2

13. 在一個四位數中，若恰好出現 2、0、1、7 這四個數碼中的三個(重複出現的數碼只算一個)，則稱這個四位數是一個「好數」。例如，8712 與 7200 都是「好數」，而 2017 與 7175 都不是「好數」。請問所有的四位數中總共有多少個「好數」？

【參考解法 1】

我們分五種情況計算「好數」的個數。

情況 1：四位數的四個數碼都不相同且沒有 0。

則其中三個數碼必為 2、1 或 7，另一個數碼需選自 3、4、5、6、8、9，共有六種選擇方式。而當這四個數碼被選定後，它們有 $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ 種排列方式，故此情況下共有 $6 \times 24 = 144$ 個「好數」；

情況 2：四位數的四個數碼都不相同且有 0。

則另有兩個數碼選自 2、1 或 7，最後一個數碼需選自 3、4、5、6、8、9，故有 $3 \times 6 = 18$ 種選擇方式。而當這四個數碼被選定後，因為首位數碼不得為 0，它們有 $3 \times 3 \times 2 \times 1 = 18$ 種排列方式，故此情況下共有 $18 \times 18 = 324$ 個「好數」；

情況 3：四位數有一個重複數碼，且四個數碼沒有 0。

則所有數碼必須為 2、1 或 7。從 2、1、7 中選擇一個重複的數碼有 3 種方式。

而當這四個數碼被選定後，它們有 $\frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{2} = 12$ 種排列方式，故此情況下共有 $3 \times 12 = 36$ 個「好數」；

情況 4：四位數有一個重複數碼，且四個數碼中恰有一個 0。

則在 2、1 或 7 中選擇一個數碼出現 2 次，另一個數碼出現 1 次，故有 $3 \times 2 = 6$ 種選擇方式。而當這四個數碼被選定後，因首位數碼不得為 0，它們有 $\frac{3 \times 3 \times 2 \times 1}{2} = 9$

種排列方式，故此情況下共有 $6 \times 9 = 54$ 個「好數」；

情況 5：四位數有一個重複數碼，且四個數碼中恰有兩個 0，則需在 2、1、7 中

選擇兩個數碼，故有 3 種選擇方式。而當這四個數碼被選定後，因首位數碼不得為 0，它們有 $\frac{2 \times 3 \times 2 \times 1}{2} = 6$ 種排列方式，故此情況下共有 $3 \times 6 = 18$ 個「好數」。

綜上所述，共有 $144 + 324 + 36 + 54 + 18 = 576$ 個「好數」。

【參考解法 2】

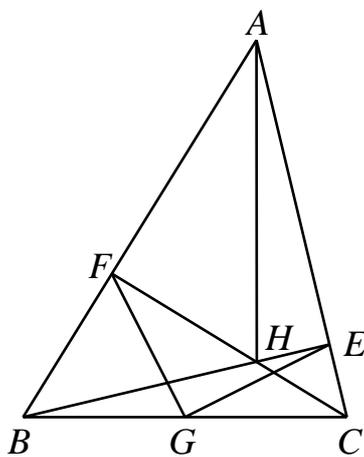
我們先求出所有可能的數碼排列的個數，最後刪除掉 0 為首位數碼的情況數。若四個數碼兩兩不同，則其中三個數碼選自 2、0、1、7，另一個數碼選自 3、4、5、6、8、9，共有 $4 \times 6 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 576$ 個排列。在這類情況下，0 為首位數碼時，後面必然是 2、1、7 中的兩個數碼與 3、4、5、6、8、9 中的一個數碼，共有 $3 \times 6 \times 3 \times 2 \times 1 = 108$ 個排列是以 0 為首位數碼。

若四個數碼有兩個數碼相同，則它們必然全部選自 2、0、1、7，先選一個數碼出現二次(有 4 種選法)，再選兩個數碼各出現一次(有 3 種選法)。而當這四個數碼被選定後，它們有 $\frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{2} = 12$ 種排列方式，故此情況下共有 $4 \times 3 \times 12 = 144$ 種排列。然而在這類情況下，四個數碼均選自 2、0、1、7，每個數碼在每個位置上都有四分之一的情況，故 0 為首位數碼的情況有 $\frac{144}{4} = 36$ 個。

綜上所述，共有 $576 - 108 + 144 - 36 = 576$ 個「好數」。

答案： 576 個

14. 在 $\triangle ABC$ 中，點 G 是 BC 的中點， $BE \perp AC$ 、 $CF \perp AB$ ， BE 與 CF 相交於點 H ，如下圖所示。已知 $\angle EGF = 90^\circ$ ，請證明 $AH = BC$ 。



【參考解法】

由於 $BE \perp AC$ 、 $CF \perp AB$ ，點 G 是 BC 的中點，故 $GB = GC = GE = GF$ 。(5 分)

故 $\angle FCG = \frac{180^\circ - \angle FGC}{2}$ 、 $\angle ECG = \frac{180^\circ - \angle EGC}{2}$ ，所以

$$\angle ECF = \frac{180^\circ - \angle EGC}{2} - \frac{180^\circ - \angle FGC}{2} = \frac{\angle FGC - \angle EGC}{2} = \frac{\angle EGF}{2} = 45^\circ。(5 分)$$

又 $CF \perp AB$ ，故 AFC 為等腰直角三角形，即 $AF = CF$ 。(5 分)

由點 H 是 $\triangle ABC$ 之垂心，可得知 $AH \perp BC$ ， $\angle FAH = 90^\circ - \angle ABC = \angle FCB$ ，又 $\angle AFH = 90^\circ = \angle CFB$ 、 $AF = CF$ ，故 $\triangle AFH \cong \triangle CFB$ ，因此 $AH = BC$ 。(5 分)

15. 若 k 為整數且 $k > 1$ ，已知不定方程 $x^2 + (x+k)^2 = y^2$ 有滿足 x, y 互質的正整數解 (x, y) ，請問正整數 k 之最小值是什麼？

【參考解法】

當 $k=7$ 時，不定方程有解 $(5, 13)$ ，下面證明 $k=7$ 就是最小值。(5分)

首先注意到 x 與 k 必須互質，否則若它們有公共質因數 p ，則 $p|y^2$ ，故 $p|y$ ，與 x, y 互質互質相矛盾。

若 k 是偶數，則 x 必須是奇數，但此時 x^2 與 $(x+k)^2$ 均被 4 除餘 1，故 y^2 被 4 除餘 2，但不存在這樣子的 y ，故不合。(5分)

若 $3|k$ ，則 x 不是 3 的倍數，但此時 x^2 與 $(x+k)^2$ 均被 3 除餘 1，故 y^2 被 3 除餘 2，但不存在這樣子的 y ，故不合。(5分)

若 $5|k$ ，則 x 不是 5 的倍數，但此時 x^2 與 $(x+k)^2$ 被 5 除的餘數相同且為 1 或 4，故 y^2 被 5 除餘 2 或 3，但不存在這樣子的 y ，故不合。

綜上所述， k 不能是 2、3、5 的倍數，又 $k > 1$ ，故 $k=7$ 就是最小值。(5分)

【註】 給出 $k=7$ 時的一組解並宣稱最小 k 為 7 可得 5 分，證明 k 不能是 2、3、5 中某一個數的倍數得 5 分。